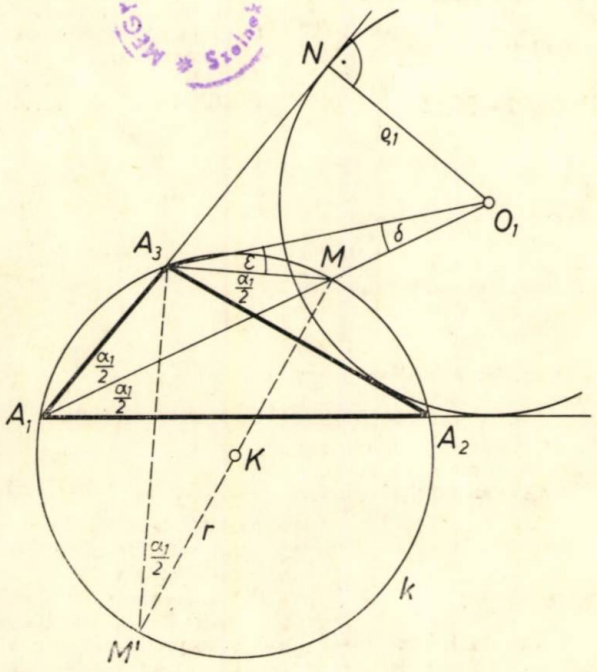
Ped H:2,4

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

MEGYEI KÖNYVTÁR Szolnok



1979. március * XXVI. évfolyam 1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211—200.
77-197 — Szegedi Nyomda — F.v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalban, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodában (KHI, 1051 Budapest, József nádor tér 1., telefon: 180-850, postacím: *1900 Budapest*) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Oláhné dr. Erdélyi Mária: Az 1919-es Tanácsköztársaság Iskolai Reformbizottsága 1
OPI Matematikai Nevelési Osztálya: Hol tartunk az általános és középiskolai matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok bevezetésében? .. 6
Bereznai Gyula: Osztás törttel 10
Fitos László: A tetraéderek osztályozása 15
Bencze Mihály: Fibonacci egyik feladatáról 17
Az iskolai szakfelügyelők országos pályázatáról 19
FELADATOK 20
KÖNYVISMERTETÉS 30

СОДЕРЖАНИЕ

Оланэ д-р Эрдейи Мария: Комиссия школьной реформы в Венгерской Советской Республики года 1919 1
Секция по Математического Воспитания Национального Педагогического Института: Актуальная ситуация по введении среднешкольных программах по математике и примыкающих к ними учебных пособией 6
Березнаи Дюла: Деление на дроби 10
Фитош Ласло: Классификация тетраэдров 15
Бенце Михай: Об одной задачи от Фибоначчи 17
О государственном конкурсе школьных инспекторов 19
ЗАДАЧИ 20
РЕЦЕЗНИЯ 30

INHALT

Dr. Mária Oláh (geb.: *Erdélyi*): Das Komitee für die Schulreform der Räterepublik von 1919 1
OPI-s Abteilung für Mathematische Erziehung: Ein kleiner Überblick der gegenwärtigen Situation, was die Einführung der neuen Mathematik-Lehrpläne und der zugehörigen Dokumente in den Grund- und Mittelschulen anbelangt ... 6
Bereznai, Gyula: Division durch einen Bruch 10
Fitos, László: Die Klassifizierung der Tetraeder 15
Bencze, Mihály: Über eine Aufgabe von Fibonacci 17
Über die nationale Preisausschreibung für die Schulinspektoren 19
AUFGABEN 20
BUCHBESPRECHUNG 30

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

1979. ÉVI XXVI. ÉVFOLYAMÁNAK TARTALMA

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 2/58, 4/120
Az iskolai szakfelügyelők országos pályázatáról 1/19
Békefi Zsuzsanna: Megjegyzések az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny II. fordulóján írt dolgozatokhoz 5/149
Bencze Mihály: Fibonacci egyik feladatáról 1/17
Bereznai Gyula: Osztás törttel 1/10
Dr. Berzsenyi György—Hódi Endre: Annual High School Mathematics Examination 2/53
Cser Andor: Az általános iskolai ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához készült feladatgyűjtemény feladatainak megoldása. I—II. rész. 4/99, 6/161
Dr. Elekes György: A kombinatorikus geometriáról I. (A Helly tételkör) 2/59
Dr. Elekes György: A kombinatorikus geometriáról II. 3/82
Fitos László: A tetraéderek osztályozása 1/15
Fitos László: Az egyenlő oldalú tetraéder hozzáírt gömbjeiről 2/42
Hódi Endre: A 30. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsga 3/74
Hódi Endre: Egy hozzászólás 5/154
Hódi Endre: Rövid beszámoló a XXI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról 6/173
Hódi Endre: Szovjet felvételi feladatokból 4/115
Káli Ferenc: A szabályos és a derékszögű háromszögnek megfelelő tetraéderekről 6/169
Kanász László: A „Logikai készlet" elnevezésű újítás rövid ismertetése 2/33
Karádi Károlyné: A szakfelügyelet szerepe a nevelő-oktató-képzőmunka permanens fejlesztésében, a tanítási-tanulási folyamat korszerűsítésében. I—II. rész 4/106, 5/129
Dr. Kelemen József: A Héron-féle háromszögekről 6/177
Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (kísérleti anyag). I. osztály, 1. rész. 5/139
Kósa József: Folyamatábrák tanításának lehetőségei a középiskolában 2/39
Közlemény a 4. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról 5/160
Miskolczi József—Dr. Szilassi Lajos: A térszemlélet fejlesztésének lehetőségei és módszerei a matematikaoktatásban 3/67
Mit ír a Kvant a zsebszámológépek iskolai használatáról? 5/158
Oláhné dr. Erdélyi Mária: Az 1919-es Tanácsköztársaság Iskolai Reformbizottsága 1/1
OPI Matematikai Nevelési Osztálya: Hol tartunk az általános és középiskolai matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok bevezetésében? 1/6
Pálfy Sándor: A Kis Matematikus Baráti Körök országos versenye 2/34
Pálfy Sándor: Az általános iskolai ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához készült munkalapok feladatainak megoldása. I—II. rész 4/97, 6/166
Dr. Rédling Elemér: A geometriai gondolkodás fejlődésének szintjei 3/65
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus Vándorgyűlés Nyíregyházán 5/159
Vadkerty Tibor—Hódi Endre: A Hérón-féle háromszögekről 2/44

FELADATOK 1/20, 3/90, 4/122, 6/182

KÖNYVISMERTETÉS 1/30, 6/111

OLÁHNÉ DR. ERDÉLYI MÁRIA
egyetemi docens
KLTE Debrecen

Az 1919-es Tanácsköztársaság Iskolai Reformbizottsága

Az 1919-es Tanácsköztársaság — fennállásának rövid ideje alatt — oktatásügyi vonalon is igen széles körű tevékenységet fejtett ki. Az oktatásügy társadalmi feltételeit jelentő rendelkezések, továbbá az iskolák szervezeti életét érintő kérdések mellett kiterjedt a gondoskodás az iskola belső munkájára is, egészen az egyes tantárgyak programjainak összeállításáig. *A Tanácsköztársaság Iskolai Reformbizottsága elkészítette a nyolcosztályos általánosan kötelező népiskola és az erre épülő öt évfolyamú középiskola egyes tantárgyainak tantervét.*[1] Elkészült a népiskola számtan és mértan, továbbá a középiskola matematika-tanterve. Mindhárom tanterv esetében igen alapos, a részletekre is kiterjedő gondos munkát végzett a munkálatokat folytató albizottság. A matematikai albizottság ügyvezetője és előadója *Szűcs Adolf*[2] volt. A tanácskozásokon részt vettek: *Fekete Mihály*,[3] *Bálint Elemér, Szmodics Hildegard* és *Gerhard Henrik*.[4]

E megemlékezés keretében először is ismertetjük az említett tantervekben szereplő kitűzött oktatási célt, ezt követően a tananyagra vonatkozó előírást, majd pedig a feldolgozásra adott további útmutatásokat, és közben rámutatunk a kor haladó nézeteivel való kapcsolatra is.

Az egységes nyolcosztályú *népiskola számtantanításának céljaként* a következőt tűzte ki a bizottság: „megtanítani a gyermeket arra, hogy az új társadalmi életben előforduló számtani feladatokat könnyen és biztosan megoldhassa. A formális képzőerőt, amely a tárgy természetében rejlik, s a tanításnak mintegy második eredménye, értékesnek tekintjük."[5]

Az előírt tananyagban az első négy osztályban a természetes számok körében (százezres nagyságrendig) szóban és írásban végzett műveletek, majd az **5.** *osztályban* a tizedes törtek, a **6.** *osztályban* pedig a közönséges törtek bevezetése és a velük való számolás szerepelt. A 6. osztály előírt tananyaga volt még a „tizedes és közönséges törtek kölcsönös átalakítása" egymásba, arány

[1] Az 1919-es Magyar Tanácsköztársaság Iskolai Reformtervezete. Szerkesztette: Dr. Pásztor József (Fővárosi Pedagógiai Szeminárium kiadványa), Budapest, 1959.

[2] Szűcs Adolf (1884—1945) Budapesten és Párizsban folytatott egyetemi tanulmányai után középiskolai tanár, majd műegyetemi oktató volt. A Tanácsköztársaság alatt oktatásügyi vonalon dolgozott, ami miatt később állásából elbocsátották. 1925-ben került vissza a Műegyetemre. A variációszámítás és a differenciálszámítás területén kifejtett tudományos munkássága mellett érdekelték a középiskolai matematikatanítás kérdései is. 1945-ben a nyilasok áldozata lett. (Lásd bővebben: Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.)

[3] Fekete Mihály (1886—1957) a Budapesten és Göttingenben folytatott egyetemi tanulmányainak befejezése után először a Műegyetemen dolgozott Beke Manó mellett, majd 1920-tól a Budapesti Tudományegyetemen. A Tanácsköztársaság bukása után — abban vállalt szerepe miatt — állásától megfosztották. Ezt követően először középiskolai tanárként, majd 1928-tól haláláig a jeruzsálemi egyetem tanáraként dolgozott. Az algebra és a komplex függvénytan területén végzett kutatásokat. (Lásd bővebben: Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.)

[4] „A középiskolai mathematikai albizottság javaslata" című rész végén szerepel e bizottság megadása. A népiskolai számtan- és mértan-tantervnél nincsenek feltüntetve nevek. Feltehetően ugyanez a bizottság foglalkozott e tantervekkel is.

[5] 1. számú jegyzet 150. oldal.

és aránypár, százalékszámítás. E tananyag tanítása közben már a **3.** *osztálytól* szerepelt volna a különböző mértékek tanítása, amit tovább bővítettek volna a **7.** és **8.** *osztályban* a fontosabb külföldi és a régi hazai mértékek és pénzek ismertetésével. A 7. osztályban szerepelt volna „a számkör teljes és tudatos kiépítése milliárdig". Ezenkívül megtalálható még ugyanennek az osztálynak előírt tananyagában „a kamat és kamatoskamat kiszámítása", átlagszámítás, arányos osztás, elegyítés szabálya, öntvényszámítás elemei, egyszerű statisztikai adatok gyűjtése és feldolgozása, elemi könyvvitel. A 8. osztályban megismerték volna a tanulók a pénzhelyettesítők [csekk, bon, klíring (clearing), átutalás, kamatmentes folyószámla] használatát. A 8. osztály feladata lett volna „az eddig tanult mennyiségtani ismeretek algebrai kiépítése és összefoglalása".[6]

Teljesen önálló tárgyként szerepelt volna a népiskolában a *mértan*, amelynél *tanítási célként* tekintette a bizottság „a mértani testek és elemeinek oly módon való megtanítását, hogy ezen ismereteit a gyakorlati életben hasznosítani is tudja a tanuló".[7]

A mértan tanítása az **5.** *osztályban* kezdődött volna, alapozva a kézimunka tanítása során megismert mértani fogalmakra, továbbá a tanulók által agyagból készített testekre. Ezekből a testekből kiindulva „analitikai úton" kerültek volna ismertetésre a mértani alapfogalmak: lap (sík és görbe) mint a testek határai, egyenes és görbe vonal mint a lapok határai, az egymást metsző élekkel kapcsolatosan a szögek és a pontok. E kiindulás után már az 5. osztályban tárgyalásra kerültek volna a háromszögek, a négyszögek, a sokszögek és a kör, továbbá egyszerű szerkesztések. A **6.** *osztály* előírt tananyaga a sík- és testmértan volt: egyes síkidomok részletes tárgyalása után kerületük, területük, továbbá néhány test [egyenes hasáb, kocka, ferde hasáb, gúlák (egyenes és ferde), csonkagúla] hálója. A **7.** *osztályban* a síklapú testekről tanultak összefoglalása után a henger, a kúp és a gömb került volna tárgyalásra, kitérve közben a körnek és részeinek alaposabb feldolgozására. Az osztály előírt tananyaga volt még az egybevágóság és hasonlóság feltételeinek összefoglalása, arányos szakaszok szerkesztésekkel kapcsolatosan, továbbá a „lépték szerinti rajzolás". A **8.** *osztály* előírt anyagának középpontjában a testmértan állt. A megismert testek köbtartalmának kiszámítása után elő volt írva a „bemártásos és fajsúlyos térfogatszámítás", „földtöltések, árkok, kövezési kőrakások, hordók térfogata", majd ezt követően „indirekt feladatok" megoldása (pl. egy háromszög területéből az alap vagy magasság kiszámítása), Pitagorasz-tétel és alkalmazása, terepen „egyenesek és merőlegesek kitűzése" és különböző mérések.

A középiskolai matematikatanítás céljaként a következőt tűzte ki a bizottság: „Bevezetés az exakt gondolkodás formáiba és az exakt természettudományokhoz szükséges mathematikai ismeretek megszerzése. Emellett az algebra tanításnak a mathematikai műveletek tudatossá tételére, a geometriainak a térszemlélet és az intuíció fejlesztésére kell törekedni."[8]

E tanterv „az esetleg többfelé ágazó középiskola azon typusa számára készült, amelyben a mathematika a legnagyobb terjedelemben fog taníttatni"[9]. A fokozatosság, az egyes anyagrészek egymásra épülése és kölcsönhatása, a matematikán belüli kapcsolatok feltárása éppúgy jellemzője e tantervnek, mint a matematika és más tudományok viszonyának megmutatása.

A középiskola **I.** *osztályának* előírt matematika-tananyaga a következő volt: A racionális számokra vonatkozó ismeretek és az alapműveletek áttekintése, a számelmélet elemei (amely helyes tárgyalásban jó képet nyújtott volna a matematikai szigorúság követelményeiről), „algebrai kifejezések átalakítása", helyettesítési értékük számítása, (függvényfogalom előkészítése), elsőfokú egyenlet és egyenlőtlenség. Továbbá a sík- és térgeometria elemei. „Összeillő idomok" (síkban és térben). Mértani helyek. A párhuzamosság axiómája. Háromszögek és paralelogrammák. Pitagorasz tétele. Tréder, paralelepipedon. Ábrázoló geometria elemei. Euler tétele. Kör és részei, gömb.

A **II.** *osztály* előírt anyaga volt: Hosszúságmérés (összemérhető és össze nem mérhető vonaldarabok viszonya). Irracionális szám bevezetése. Hasonlóság. A trigonometriai függvények

[6] „Algebrai alapműveletek (köbgyökig) a legegyszerűbb általános számokkal, mindig közönséges számokon megvilágítva és bizonyítva. Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek és gyakorlati alkalmazásuk a számtanban, mértanban, fizikában." (1. számú jegyzet 165. oldal.)

[7] 1. számú jegyzet 167. oldal.

[8] 1. számú jegyzet 175. oldal.

[9] 1. számú jegyzet 177. oldal.

bevezetése. Derékszögű koordináta-rendszer (síkban), elsőfokú függvény. Kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer (megoldása grafikusan és algebrai módszerekkel). Másodfokú függvény, magasabb fokú egész- és néhány egyszerű törtfüggvény. Másodfokú egyenlet, egyenlőtlenség. „Néhány egyszerű magasabb fokú egyenlet grafikus megoldása." Sinus- és cosinus-tétel. Pontnak körre vonatkozó hatványa. Hasonlósági transzformáció (síkban és térben), inverzió (síkban). Területmérés, köbtartalommérés. Szabályos poliéderekkel kapcsolatos számításos és ábrázoló geometriai feladatok.

A **III.** *osztály* tanulói számára a következőket írta elő a tanterv: Vektorok. A szögfüggvények általános definíciója és alkalmazásuk. Polárkoordináták (síkban és térben). Koordinátatranszformáció (síkban). A kör területe és kerülete, gúla és hasáb síkmetszetei. Affinitás, perspektivitás. Térbeli derékszögű koordináta-rendszer. Gömbháromszögtan. Henger, kúp és gömb köbtartalma és felszíne. Logaritmus és exponenciális függvény (ajánlott út: „a logarithmus mint terület", és ennek inverzeként az exponenciális függvény), a logaritmus alkalmazása számításokban. Számtani és geometriai sor (végtelen geometriai sor is, végtelen szakaszos tizedes tört).

A **IV.** *osztály* előírt tananyagában a következők szerepeltek: A komplex számok bevezetése. Lineáris ponthalmazok tulajdonságai. Számsorozat határértéke, végtelen sor. Függvény határértéke, folytonossága. Differenciálhányados, elemi függvények differenciálása (közvetett függvényé is). Másodrendű differenciálhányados, függvények menete, szélsőérték-számítás. Perspektív pont-, sugár- és síksorok. Projektív sík és tér; végtelenben fekvő elemek. Kettősviszony (metrikusan). Projektív alakzatok. Egyenes és kör analitikus geometriája.

Az **V.** *osztályban* került volna sor a következő anyagrészek tanítására: Magasabbrendű differenciálhányadosok. Véges Taylor-sor. Néhány elemi függvény sorbafejtése. Folytonos függvény határozott integrálja. Primitív függvény. Integrálás helyettesítéssel. Egyes síkidomok területe, forgástestek köbtartalma. Súlypont és tehetetlenségi nyomaték kiszámítása. Kombinatorika és valószínűségszámítás. Kúpszeletek egyenletei. Másodrendű görbék osztályozása. Kúpszeletek projektív tulajdonságai. A középiskolai tanulmányok befejezéseként pedig a matematikai gondolkozás formái és a matematika szerepe feletti filozófiai áttekintés.

Emellett azoknak a felső osztályos diákoknak a számára, „akik egyes, a tanításban csak érintett problémák iránt különösen érdeklődnek és képesek e problémákkal, irodalmi segédeszközökre támaszkodva foglalkozni", szemináriumi foglalkozást írt elő a tanterv, kijelölve néhány ilyen feldolgozásra alkalmas témakört is.

Az előzőkben ismertetett tananyagot *összehasonlítva* az akkor érvényben levő népiskolai és középiskolai tantervvel megállapítható az, hogy igen komoly *tananyagbővítést* jelentett volna a Tanácsköztársaság tanterveinek követése. Ez főként a középiskolai oktatásban jelentkezett volna, ugyanis az összehasonlításkor a népiskola vonatkozásában azt is figyelembe kell vennünk, hogy az nyolcosztályos lett volna az eredeti hat helyett. Ennél az iskolatípusnál az igazi összehasonlításhoz a népiskola mellett tulajdonképpen még a polgári iskola és a nyolcévfolyamos középiskola alsó négy osztályának tantervét is meg kell vizsgálni. Ezek tekintetbevételével már nemigen beszélhetünk a népiskolai oktatásnál lényeges eltérésről a számtan és a mértan tananyagának vonatkozásában. Az eltérés viszont annál inkább mutatkozott volna szervezeti kérdésben, vagyis abban, hogy amit eddig csak egyeseknek (középiskolai tanulmányokat folytató tanulóknak) tanítottak, azt most már közkinccsé, minden gyermek számára kötelezően előírttá akarták tenni. A középiskolai tananyagnál már sokkal több eltérés mutatható ki. Ebben az esetben az összehasonlításkor a nyolcévfolyamos középiskola felső négy osztályát kell figyelembe vennünk. A Tanácsköztársaság Iskolai Reformbizottsága ehhez képest egy évvel többet (öt évet) szánt a középiskolai oktatásra. De az anyagbővülés nem magyarázható csak ezzel, ui. az több volt annál, mint ami egy osztály anyagába belefért. Igen bőséges lett volna a középiskolai oktatás matematika-tananyaga. Jogosan vetődik fel a kérdés, hogy nem volt-e esetleg túlméretezett az előírt anyag. Óraszámot nem adott meg a tantervet készítő bizottság. A tantervek gyakorlati megvalósítására pedig még szűk körben sem került sor, és így tanítási tapasztalat nem áll rendelkezésünkre. Ezek miatt e tanterv gyakorlati megvalósítását illetően elsősorban csak feltételezésre

szorítkozhatunk. Mivel a középiskolai tanterv lényegében — egy, a matematikából maximális tananyagot tanító — tagozat számára készült, így valószínűleg nyugodtan állíthatjuk azt, hogy megfelelő óraszám biztosítása esetén el lehetett volna végezni az előírt anyagot.[10]

Bár tanítási tapasztalat nem áll rendelkezésre, de azért nem minden előzmény nélkül jöttek létre e tantervek, ugyanis a tantervet készítő bizottság alapozhatott bizonyos kísérletekre. A tanterveket készítő bizottság munkája során támaszkodhatott és határozottan támaszkodott is a századeleji reformmozgalom eredményeire. A századforduló táján igen sok országban (pl. Franciaországban, Németországban, Ausztriában, Olaszországban, az Amerikai Egyesült Államokban, Angliában) matematikaoktatási reformbizottságok alakultak neves matematikusok irányításával, illetve közreműködésével. A *Magyar Matematikaoktatási Reformbizottság* — amely 1906-ban alakult *Beke Manó* professzor elnökletével — három éven keresztül foglalkozott a matematikaoktatási reform előkészítésével. A reformbizottság tagjai határozottan állást foglaltak amellett, hogy a matematika hasznos és gyakorlati értékű tudomány, amit a tanítás során feltétlenül érvényre kell juttatni. A matematika oktatását közelebb akarták hozni a gyakorlati élethez, különösen fontos jelentőséget tulajdonítottak a matematika és fizika kapcsolatának. A gyakorlati élettel való kapcsolat egyik legjobb eszközének a tanulók méréseit tartották. A határozatban is szerepelt, hogy a számtantanításnak mérési műveletekkel kell kapcsolatosnak lennie. Bár a századeleji reformmozgalom nem akart tanterveket készíteni, de azért bizonyos anyagrészek tanításának kérdésében állást foglalt. Ilyenek voltak pl. „a függvényszerű gondolkodásmód kifejlesztése", a differenciál- és integrálszámítás elemeinek tanítása, a sík- és térgeometria együttes, továbbá az analitikus geometria mélyrehatóbb tárgyalása, az ábrázoló geometria elemeinek oktatása, a tanulói mérések szerepének felismerése. A Magyar Matematikaoktatási Reformbizottság ugyanakkor a tanításból ki akarta zárni mindazt, „ami csak a formális képzés jelszava alapján vagy pusztán régi tradícióból tartható vissza."[11] A reformtörekvések egyik fő jellemzője a régi, formális, élettől, gyakorlattól elszakadt matematikatanítás elleni harc volt. Módszertani újításokat akartak bevezetni, a határozati javaslatban is kifejtették: „Módszerünk alapvonása: a legtágabb értelemben vett szemléltetés és intenzív begyakorlás."[12] Azt akarták, hogy a gyermekek saját tapasztalásukból tanuljanak és így „aktíve" is vegyenek részt a munkában. Súlyt vetettek az absztrakció kellő előkészítésére, a lassú, rétegszerű fogalomalkotásra. Amint már említettük, nagyon fontos szerepet tulajdonítottak a méréseknek, és e célból a határozati javaslatban is leszögezték azt a kívánalmat, hogy a matematikai szertárakat megfelelő mérőeszközökkel és modellekkel kell felszerelni.

A reformbizottság munkálatainak befejezése után több gimnáziumban és reáliskolában sor került a reform szellemében történő tanításra. Ha az ezekből az időkből származó értesítőket lapozzuk, akkor a reformmal kapcsolatosan igen sok népszerűsítő, illetve a kísérletek eredményeiről beszámoló cikket és kísérleti tanmenetet találunk. Egy — 1912-ben az ország matematikatanáraihoz intézett — a reformra vonatkozó kérdéssorozatra beérkezett válaszok alapján kiderült, hogy igen sok középiskolában (vidéken is) sor került a reform szellemében történő tanításra, és a reformmal kapcsolatos

[10] Sajnos nem tudjuk, hogy az előírt bőséges anyagból mennyi lett volna az a törzsanyag, amelyet minden középiskolai tanulónak el kellett volna sajátítania.

[11] A középiskolai matematikatanítás reformja. Szerkesztők: Beke Manó és Mikola Sándor. Az Országos Középiskolai Tanáregyesület Kiadványa, Budapest, 1909. 202. oldal.

[12] 11. számú jegyzet 150. oldal.

kísérletek már bizonyos nyugvó álláspontra jutottak. A matematikaoktatási reform különben egybeesett egy általánosan megkövetelt középiskolai reformmal. A reform tényleges végrehajtását azonban megakadályozta az 1914-ben kitört világháború. Hasonlóan ez vetett véget a nemzetközi együttműködésnek is. Az 1908-ban Rómában tartott IV. Nemzetközi Matematikai Kongresszuson felismerték a különböző országokban folyó — a matematikaoktatás módszereit és terveit összehasonlító — vizsgálatok fontosságát. E kongresszuson egy nemzetközi bizottságot *„Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (IMUK) hoztak létre *Felix Klein* német matematikus elnökletével a matematika oktatását érintő kérdések vizsgálatára. A magyar matematikusok, pedagógusok (Arany Dániel, Beke Manó, Goldziher Károly, Kőnig Gyula, Kürschák József, Rados Gusztáv, Rátz László és még sokan mások) igen aktívan vettek részt e nemzetközi bizottság munkájában. A magyar szakemberek a nemzetközi tanácskozásokon nagy sikert arató előadásokkal és felszólalásokkal járultak hozzá az Internationale Mathematische Unterrichtskommission jelentőségteljes munkájához. Pl. Beke Manó az 1914-es párizsi értekezleten elhangzott — egy gondosan kidolgozott kérdéssorozatra beérkezett feleleteken alapuló — előadásában ismertette a differenciál- és integrálszámítás középiskolai tanításával kapcsolatban világviszonylatban kialakult nézeteket.[13] Beke előadását Szűcs Adolf fordította francia nyelvre és így nyilván ismerője volt annak, hogy a differenciál- és integrálszámítás középiskolai tanításáról mi volt a vélemény világviszonylatban. Ezeket az ismereteket természetesen fel is használta Szűcs Adolf a Tanácsköztársaság középiskolai matematika-tantervének elkészítésében.

A fentiek azt mutatják, hogy a *közvélemény és a tanárok előtt nem volt idegen a matematikaoktatási reform gondolata.* Továbbá azt is, hogy több ponton *kimutatható a kapcsolat a Tanácsköztársaság számtan-, mértan- és matematika-tantervei, valamint a századeleji reformmozgalom törekvései között.* Ez a kapcsolat nemcsak a tananyagok összehasonlításakor állapítható meg, hanem akkor is kitűnik, amikor a tárgyalásmódra, az anyagkezelés szemléletére vonatkozó utasításokat vizsgáljuk.

A Tanácsköztársaság Iskolai Reformbizottságának matematikai albizottsága a kezdőfokú számtantanításban a kisgyermek cselekvését, alkotó munkáját akarta középpontba állítani, a tananyag feldolgozása során rá is mutatva az ilyen irányú lehetőségekre, és hangsúlyozva azt, hogy az új tanításban „A régi drill helyébe a gyermek élete: a játékos foglalkozás lép."[14] A gyermek cselekvését, a „törvényszerűségek" megállapításakor a tanulók önálló munkálkodásának fontosságát a népiskola felső osztályaiban is követendőként írták elő mind a számtan, mind a mértan tanításában. A mértantanítás gerince is a gyermek munkája, kísérletezgetése lett volna. Agyagból gyúrt testek, pálcikák, papírhajtogatás, vágás szerepeltek leggyakrabban az előírt munkák között. Továbbá nagyon fontos szerepet szántak a Tanácsköztársaság tantervei a mérésnek mind a számtan, mind a mértan tanításában, sőt a középiskolai tantervben is. Az önálló gondolkodási készség fejlesztését, a formális matematikatanítás elleni harcot szintén határozottan hangsúlyozták e tantervek. A terveket készítő bizottság szerint fokozatosan kellett volna kialakítani a tanulókban a bizonyítás, a tudományos tárgyalás iránti igényt. A középiskolai tanulmányok befejezéseként pedig sor került volna a matematikai gondolkozás formái

[13] Negyedik nemzetközi értekezlet a mathematikai oktatásról. (Páris, 1914. április 1—4.) Készítette: Szabó Péter. (A Vallás- és Közoktatásügyi Minisztériumhoz benyújtott jelentés.)

[14] 1. számú jegyzet 150. oldal.

és a matematika szerepe feletti filozófiai áttekintésre, kitérve az ebből adódó világnézeti nevelés lehetőségeire is. A világnézeti neveléssel való törődés különben már a népiskolában is szerepet kapott volna. Pl. abban, hogy olyan példákat kell venni, „amelyek a szocialista állam törekvéseinek helyességét teljesen átérezhetővé, érthetővé teszik a régi kapitalista rendszerrel szemben."[15] A tantervet készítő bizottság több erre alkalmas témakört is megadott. Továbbá a jellemnevelés szempontjaira is figyelemmel kívánt lenni, előírva azt, hogy a tanító éberen őrködjék azon, „nehogy nehézkes és határozatlan legyen a tanulónak bármiféle munkája. Gondolkodjon, de ha megtalálta a kiszámítás helyes útját, ne ismerjen nehézséget a cél elérésében. A cselekvéshez szükséges határozottság, a bátorság kifejlesztése érdekében, az összetett feladatok kiszámításához ne engedjük addig hozzáfogni a tanulót, míg a kiszámítás tervét velünk nem ismertette."[16]

E rövid megemlékezésben kifejtettek meggyőzően igazolják azt, hogy a Tanácsköztársaság számtan-, mértan- és matematika-tanterveinek elkészítése — akár a tananyag, akár a tanításra adott útmutatások szempontjából vizsgáljuk — a kor leghaladóbb nézeteinek figyelembevételével történt.

ORSZÁGOS PEDAGÓGIAI INTÉZET
MATEMATIKAI NEVELÉSI OSZTÁLYA

Hol tartunk az általános és középiskolai matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok bevezetésében?

Az alábbiakban közöljük a már megjelent tantervek és dokumentumok jegyzékét a legszükségesebb bibliográfiai adatokkal iskolatípusok szerinti csoportosításban. Minden esetben csak az utolsó kiadást jelöljük meg. Zárójelben feltüntetjük az alkalmazásba vétel évét is.

1. ÁLTALÁNOS ISKOLA
1.1. **Alsó tagozat**
1.1.1. *Ideiglenes tanterv*

Oktatási Minisztérium, Budapest, 1976. ISBN 963 7023 42 9. (1974-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Varga Tamás: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 2. osztályos anyagának tanulásához, 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1222/M. (1975-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Merő László—Varga Tamás: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 2. osztályos anyagának tanításához I., II. kötet. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976. R. sz.: 91 479/I., II. (1975-től.)

Kovács Zoltán: Matematika az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanulásához, 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1322. (1976-tól.)

Erdész Edéné—dr. Kovács Vendelné: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanulásához, 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1322/M. (1976-tól.)

[15] 1. számú jegyzet 160. oldal.
[16] 1. számú jegyzet 164. oldal.

Erdész Edéné — Hámori Miklós—dr. Kovács Vendelné—Kovács Zoltán—Radnainé Szendrei Julianna—Szálka Györgyné—Varga Tamás: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanításához I., II. kötet. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976—77. R. sz.: 91 485/I., II. (1976-tól.)

Kovács Zoltán: Matematika az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanulásához, 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 1422. (1977-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna—Varga Tamás: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanulásához, 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1422/M. (1977-től.)

Halmos Istvánné—dr. Ill Mártonné—Kovács Zoltán—Tiszai Zoltánné: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanításához I., II. kötet. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 490/I., II. (1977-től.)

1.1.2. *Új tanterv*

Az általános iskolai nevelés és oktatás terve I., II. kötet. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1977. ISBN 963 7801 49 9. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Varga Tamás: Matematika-munkalapok. Általános iskola 1. osztály, 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 102/M. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Göndöcs László—Merő László—Merő Lászlóné—dr. Varga Tamás: Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához, 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 83 015. (1978-tól.)

1.2. **Felső tagozat**

1.2.1. *Ideiglenes tanterv*

Oktatási Minisztérium, Budapest, 1976. ISBIV 963 7023 43 7. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 5. osztálya számára, 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1522. (1974-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanulásához, 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1522/M. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Feladatgyűjtemény és munkalapok, 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1522/K. (1978-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához, 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 478. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 6. osztálya számára, 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1622. (1975-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanulásához, 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1622/M. (1975-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanításához, 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 480. (1975-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 7. osztálya számára, 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1722. (1976-tól.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanulásához, 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1722/M. (1976-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanításához, 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976. R. sz.: 91 486. (1976-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 8. osztálya számára. I., II. kötet. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 1822/I., II. (1977-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanulásához, 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 1822/M. (1977-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanításához, 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 487. (1977-től.)

1.2.2. *Új tanterv*

Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Sz. Földvári Vera: Matematika 5. Általános iskola, 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 502. (1978-tól.)

Csahóczi Erzsébet—Halmos Istvánné—Radnai Gyuláné—Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 5. osztály, 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 502/M. (1978-tól.)

Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Radnainé Szendrei Julianna—Sztrókayné Földvári Vera: Tanári kézikönyv. Általános iskola. Matematika 5., 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 83 001. (1978-tól.)

2. KÖZÉPISKOLA (ÉS KÖZÉPFOKÚ ISKOLA)

2.1. **Szakmunkásképző iskola**

A szakmunkásképző iskolák nevelési és oktatási terve. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 061. (1977-től.)

Bige Istvánné—Cser Andor—Szegedi Miklós: Matematika a szakmunkásképző iskolák I. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 12 502. (1977-től.)

Bige Istvánné: Munkalapok matematikából a szakmunkásképző iskolák I. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 12 502/M. (1977-től.)

Bige Istvánné: Módszertani útmutató a szakmunkásképző iskolák I. osztálya számára készült matematikai munkalapokhoz. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 001/I. (1977-től.)

Bige Istvánné—Csánk István—Szabó Sándorné: Matematika a szakmunkásképző iskolák II. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 12 602. (1978-tól.)

Bige Istvánné: Munkalapok matematikából a szakmunkásképző iskolák II. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 12 602/M. (1978-tól.)

Bige Istvánné: Módszertani útmutató a szakmunkásképző iskolák II. osztálya számára készült matematikai munkalapokhoz. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 001/II. (1978-tól.)

Bedő László—Bige Istvánné—Szabó Sándorné: Matematika a szakmunkásképző iskolák III. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 12 702. (1978-tól.)

Szabó Sándorné: Munkalapok matematikából a szakmunkásképző iskolák III. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 12 702/M. (1978-tól.)

Szabó Sándorné: Módszertani útmutató a szakmunkásképző iskolák III. osztálya számára készült matematikai munkalapokhoz. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 001/III. (1978-tól.)

Koller Lászlóné: Módszertani útmutató matematikából a szakmunkásképző iskolák számára. Pedagógus továbbképzés könyvtára. 1. kiadás. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1977. (1977-től.)

2.2. Szakközépiskola

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—5—4—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—33. (1978-tól.)

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—4—3—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—34. (1978-tól.)

Czapáry Endre: Matematika a szakközépiskolák I. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 14 102. (1978-tól.)

Czapáry Endre: Feladatlapok matematikából a szakközépiskolák I. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 14 102/F. (1978-tól.)

Lasztóczi Gyula: Tantervi útmutató matematikából a szakközépiskolák számára. I. rész: I—II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 021/I. (1978-tól.)

2.3. Gimnázium

A gimnáziumi nevelés és oktatás terve. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 064. (1979-től.)

Ábrázoló geometria. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4077. (1978-tól csak a kijelölt iskolákban.)

Matematika. A változat. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4052. (1978-tól csak a kijelölt iskolákban.)

Matematika. B változat. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4051. (1978-tól csak a kijelölt iskolákban.)

Értesítjük t. Előfizetőinket,

hogy a Minisztertanács Tájékoztatási Hivatalának rendelkezése alapján 1979. II. hó 1-től a gondozásunkban megjelenő módszertani folyóiratok ára megváltozott. Egy példány ára 4,50 Ft, éves előfizetési ár 27,— Ft.

BEREZNAI GYULA
főiskolai tanár, Nyíregyháza

Osztás törttel

Ennek az ismertetésnek az ad most különös aktualitást, hogy az NDK módszertani folyóiratában nemrégen megjelent dr. Günter Pietzschnek, a berlini Humboldt Egyetem tanárának egy dolgozata [1.], amelyben a szerző a törttel való osztás tanításának a megszokottól eltérő lehetőségére hívja fel a figyelmet. Maga az eljárás nem új; megtalálható már egy régebbi angol matematikai folyóiratban is [2.], és nem is túl eredeti, hiszen az ötlethez bárki igen könnyen eljuthat a törtek tanítása során, életrevalósága miatt mégis figyelemre érdemes.

Lényege a következő:

Ha a gyerekek már ismerik a törtszámok szorzási szabályát, és az osztás a törtszámok körében is a szorzás inverze, akkor önként adódik az a felismerés, hogy törtszámok hányadosa az a tört, amelynek számlálója, illetve nevezője az osztandó és osztó számlálójának, illetve nevezőjének hányadosa. Számpéldán:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 7}=\frac{15}{28},$$

tehát

$$\frac{15}{28}:\frac{5}{7}=\frac{15:5}{28:7}=\frac{3}{4}.$$

De mit tegyünk, ha az osztandó számlálója vagy nevezője, vagy akár mindkettő, nem osztható az osztó számlálójával, illetve nevezőjével? Ezen is könnyű segíteni, hiszen a tanulók már ismerik az egyszerűsítést és a bővítést, tehát pl.

$$\frac{6}{7}:\frac{5}{2}$$

esetében kétszer bővítjük az osztandót: először azért, hogy a számlálóban elvégezhessük az osztást:

$$\frac{6\cdot 5}{7\cdot 5}:\frac{5}{2},$$

majd pedig azért, hogy a nevezőben is megtehessük ugyanezt:

$$\frac{6\cdot 5\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 2}:\frac{5}{2}=\frac{6\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{5}.$$

Ebből már leolvasható az osztás szabálya. — A bővítésnek mint közbülső eljárásnak szükségessége nem ismeretlen a tanulók előtt: a törtek összevonásakor gyakran alkalmazzák.

A törttel való osztásnak az ismertetett elgondolás alapján történő tanítására mintegy 10 évvel ezelőtt kísérletet végeztünk a Nyíregyházi Tanárképző Főiskola Gyakorló Iskolájában Érfalvi Ferencné és Sille Zoltán szakvezető tanárok irányításával. Ez már csak azért is indokolt volt, mert a korabeli tankönyvek az osztásra olyan (egyébként helytálló) definíciót adtak, amelyet nehéz volt megérteni, megtanulni és reprodukálni is. Tapasztalataink nem voltak rosszak, de a kísérletek továbbvitelét és a módszertani következtetések levonását meggátolta egy szakfelügyelői megjegyzés, amely szerint veszélyes dolog az analógiára építeni. Az NDK-beli újabb kezdeményezés hatására most közreadjuk annak az órának a dokumentumát, amelyre kísérletünkben legtöbbet építettünk.

1. óra

Anyaga: Tört osztása törttel.

I. Oldjátok meg legegyszerűbben a következő feladatokat!

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} =$ *b)* $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} =$

A feladatokat az óra megkezdése előtt felírjuk a táblára. *Megoldás önálló munkával.* A megoldások eredményét frontális osztálymunkával egyeztetjük, és ezzel párhuzamosan — szükség szerinti mélységben — felelevenítjük a törttel való szorzásról tanultakat. Az egyszerűsítés lehetőségének megemlítésével egyidejűleg utalunk a bővítésre.

II. *Célkitűzés:* Oldjunk meg most közösen néhány szöveges feladatot!

Közlés.

III. *Feladatok megoldása*

Frontális osztálymunkával, heurisztikus beszélgetéssel.

Hány gépalkatrészt csiszolt egy munkás

a) $\frac{9}{20}$ óra, *c)* $\frac{7}{20}$ óra, *e)* $\frac{7}{3}$ óra

b) $\frac{3}{4}$ óra, *d)* $\frac{5}{3}$ óra,

alatt, ha egy alkatrész elkészítése $\frac{3}{20}$ óráig tartott?

a) Problémafelvetés: Hogyan oldható meg a feladat?

Meg kell nézni, hogy a megadott időtartamban hányszor van meg az egy munkadarab elkészítésére fordítandó idő. Számokkal kifejezve: $\frac{9}{20} : \frac{3}{20}$.

A tanulók válaszainak indokoltatása.

Kérdés: Hányszor van meg a $\frac{9}{20}$-ban a $\frac{3}{20}$? (Háromszor.)

Írjuk fel ezt is! $\frac{9}{20} : \frac{3}{20} = 3$ (db).

Nézzük meg, vajon igazunk van-e! De hogyan?

Ellenőrzés:

1. mód:

1 db elkészítéséhez $\frac{3}{20}$ óra kell,

3 db elkészítéséhez $3 \cdot \frac{3}{20}$ óra $= \frac{9}{20}$ óra kell.

2. mód:

$\frac{9}{20}$ óra $= \frac{27}{60}$ óra $= 27$ perc,

$\frac{3}{20}$ óra $= \frac{9}{60}$ óra $= 9$ perc,

27 perc : 9 perc $= 3$.

Megállapítás: $\frac{9}{20}$ óra alatt csakugyan 3 db gépalkatrész csiszolása végezhető el. Vizsgáljuk meg még egyszer a következő kifejezést: $\frac{9}{20} : \frac{3}{20} = 3$.

Kérdések:

Milyen számok szerepelnek a feladatban?
Hogyan kapjuk meg a hányadost?
Hogyan írható fel ez a *hányados* tört alakban?
Írjuk fel így is: $\frac{9}{20} : \frac{3}{20} = \frac{3}{1}$.

Megfigyelési szempontok:

1. Miben hasonlít és miben tér el egymástól a két felírási mód?

2. Milyen új összefüggés ismerhető fel a második felírási módban?

(Az osztandó és az osztó számlálójának hányadosa lesz a hányados számlálója, az osztandó és az osztó nevezőjének hányadosa pedig a hányados nevezője.)

Kérdés: Milyen fontos *új* megállapítást tehetünk ennek alapján?

(Törtet törttel úgy oszthatunk, hogy az osztandó számlálóját az osztó számlálójával, nevezőjét az osztó nevezőjével osztjuk.)

A tanulók által javasolt ellenőrzési módok közül azt válasszuk ki, amelyik legjobbnak látszik az adott osztályközösség szempontjából!

Egy ellenőrzési módot mindenképpen rögzítsünk írásban. A második történhet szóban, de el is maradhat.

Problémafelvetés: Nézzük meg, hogy igaz-e az előbbi megállapításunk! Oldjuk meg a többi feladatot is!

b) $\frac{3}{4}:\frac{3}{20}=?$

Kérdések:
Elvégezhető-e az osztás a törtek jelenlegi alakjában?
Miért nem?
Mit kell tennünk ahhoz, hogy az osztás elvégezhető legyen? (Bővíteni kell az osztandót.) Mennyivel? Jelöljük is a bővítést:

$$\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}:\frac{3}{20}=\frac{5}{1}=5 \text{ (db)}.$$

Ellenőrzés:

$\frac{3}{4}$ óra = 45 perc. — Csak szóban!

1 db elkészítéséhez 9 perc kell,
5 db elkészítéséhez $5\cdot 9$ perc kell.

$\frac{3}{4}$ óra alatt a munkás 5 munkadarabbal készül el.

c) $\frac{7}{20}:\frac{3}{20}=?$ Hogyan kell most bővítenünk, hogy az előző megoldáshoz hasonlóan számíthassuk ki a hányados értékét?
— Bővítés után végezzük el az osztást!

$$\frac{7\cdot 3}{20\cdot 3}:\frac{3}{20}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3} \text{ (db)}.$$

Ellenőrzés (szorzással, következtetés nélkül): — Rögzítés írásban!

$$2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{20}=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{20}=\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{20}=\frac{7}{20}.$$

$\frac{7}{20}$ óra alatt $2\frac{1}{3}$ db gépalkatrész készülhet el. — Szóban!

Nézzük a következő feladatot!

d) $\frac{5}{3}:\frac{3}{20}=?$ — A *d)* és *e)* feladat megoldása a *c)* pont alatti feladat megoldásához hasonlóan.

$$\frac{5\cdot 3\cdot 20}{3\cdot 3\cdot 20}:\frac{3}{20}=\frac{5\cdot 20}{3\cdot 3}=\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}.$$

Ellenőrzés (szorzással, következtetés nélkül):

$$11\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{20}=\frac{100}{9}\cdot\frac{3}{20}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{3}.$$

Tehát ...

e) $\frac{7}{3}:\frac{3}{20}=?$

$$\frac{7\cdot3\cdot20}{3\cdot3\cdot20}:\frac{3}{20}=\frac{7\cdot20}{3\cdot3}=\frac{140}{9}=$$

$$=15\frac{5}{9}\text{ (db)}.$$

Ellenőrzés: ...
Tehát ...

IV. *Általánosítás*

Frontális osztálymunkával.

Írjuk fel az utolsó két feladatot úgy, hogy a kérdőjelek helyére beírjuk a hányadosokat!

$$\frac{5}{3}:\frac{3}{20}=\frac{5\cdot20}{3\cdot3}=\frac{5}{3}\cdot\frac{20}{3},$$

$$\frac{7}{3}:\frac{3}{20}=\frac{7\cdot20}{3\cdot3}=\frac{7}{3}\cdot\frac{20}{3}.$$

Megfigyelési szempontok:
Hasonlítsátok össze az egyenlőségek két oldalát
a) a szereplő számok és
b) a műveletek vonatkozásában!
Mit tapasztaltok?

Közlés.

Várható válaszok:
a) 1. A számok ugyanazok, csak az osztóban a számláló és a nevező felcserélődött.
2. A jobb oldalon az osztó reciproka áll.
b) Az egyenlőség bal oldalán osztás szerepel, jobb oldalán pedig szorzás.
Kérdés: Milyen megállapítást tehetünk ezek alapján?

Minden osztás átalakítható szorzássá.
Kérdés: Hogyan?
Az osztandót az osztó (tört) reciprokával szorozzuk.

Tehát milyen végső megállapítást tehetünk?
Törttel úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk.
Mondjuk meg a mai óra címét! Mivel foglalkoztunk ma?

Cím felírása: „Tört osztása törttel."

V. *Gyakorlás:* ... oldal ... feladat ... pont.
Ellenőrzés: A műveletek közötti összefüggés alapján: szorzással.
A gyakorlás eredményességének értékelése.

Önálló munkával.
— Az eredmények egyeztetése frontális osztálymunkával.

VI. *Házi feladat:* ... oldal ... feladat.
Szorgalmi feladat: ... oldal ... feladat.

A feladat felolvasása, a jelentkező problémák megbeszélése. (Probléma lehet az, hogy vegyes számok lépnek fel.)

IRODALOM

[1.] *G. Pietzsch:* Die Einführung der Division gebrochener Zahlen, Klasse 6; Mathematik in der Schule, 1977. 11. sz.
[2.] *B. R. Jones:* Division of Fractions: An Improved Technique; The Mathematical Gazette, 1964. 365. sz.

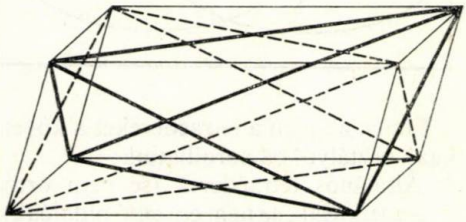
FITOS LÁSZLÓ
főiskolai docens
Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

A tetraéderek osztályozása

A tetraéderek azt a szerepet játsszák a térgeometriában, mint a háromszögek a síkgeometriában, ezért alapvető fontosságúak. Szükséges tehát, hogy alaposabban foglalkozzunk velük. Sajnos, még a főiskolákon és egyetemeken is kevés szó esik róluk. Pedig azonkívül, hogy sok érdekes téma kapcsolódik a tetraéderek különböző fajtáihoz, didaktikailag is hasznos lenne kiaknázni azokat az analógiákat, amelyek a háromszögek és a tetraéderek bizonyos tulajdonságai között állnak fenn.

A tetraéderek osztályozását a köréjük írható paralelepipedonok fajtája szerint célszerű tárgyalni. Mint közismert, a tetraéder köré úgy írunk paralelepipedont, hogy két-két szemközti élén át párhuzamos síkokat fektetünk, és ezek a síkok zárják közre a tetraéder köré írt paralelepipedont. Ennek négy csúcsa megegyezik a tetraéder csúcsaival, a többi négy csúcsa pedig az eredeti tetraéderrel egybevágó tetraédert határoz meg, hiszen a két tetraéder centrálszimmetrikus a paralelepipedon testátlóinak metszéspontjára vonatkozólag (l. az ábrát).

Az ábrát szemlélve észrevesszük, hogy a tetraéder bármely két szemközti éle a körülírt paralelepipedon két szemközti lapjának (amelyek egybevágó paralelo-



grammák) két átlója. Ezért ha a paralelepipedon speciális, akkor lapjai speciális paralelogrammák, és így azok átlói, vagyis a tetraéder szemközti élei speciális tulajdonságokkal rendelkeznek.

Ezek után vegyük sorra a tetraéder különböző fajtáit!

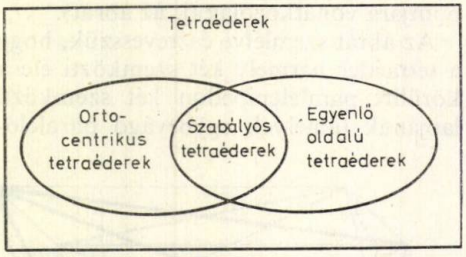
Ha a tetraéder köré írt paralelepipedon általános, akkor a tetraéder is általános.

Ha a tetraéder köré írt paralelepipedon romboéder (mindegyik lapja rombusz), akkor a tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra, mert a rombusz átlói merőlegesek. Ebben az esetben a tetraéder négy magassága egy pontban, a magasságpontban (ortocentrum) metszi egymást, ezért az ilyen tetraédert ortocentrikusnak nevezik.

Ha a tetraéder köré írt paralelepipedon téglatest, akkor a tetraéder szemközti élei egyenlők, hiszen a téglatest lapjai téglalapok, és azok átlói egyenlő hosszúak. Abból pedig, hogy a tetraéder szemközti élei egyenlő hosszúak, következik, hogy mind a négy lapja egybevágó. Az ilyen tetraédert egyenlő oldalúnak mondják.

Végül, ha a tetraéder köré írt paralelepipedon kocka, akkor a tetraéder szemközti élei merőlegesek is és egyenlők is, következésképpen az ilyen tetraéder ortocentrikus is, meg egyenlő oldalú is. Ez a legspeciálisabb tetraéder, a szabályos tetraéder.

Mindezeket halmazábrával is szemléltethetjük:



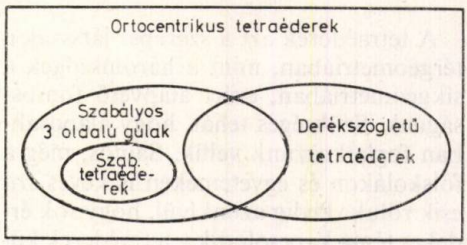
Ennek alapján a tetraédereket a következő osztályokba sorolhatjuk:

1. Általános tetraéderek (se nem ortocentrikusak, se nem egyenlő oldalúak).
2. Nem egyenlő oldalú ortocentrikus tetraéderek.
3. Nem ortocentrikus egyenlő oldalú tetraéderek.
4. Szabályos tetraéderek.

Láthatjuk, hogy ez az osztályozás helyes, hiszen az egyes osztályok, a tetraéderek halmazának részhalmazai páronként diszjunktak, és egyesítésük a tetraéderek teljes halmazát adja.

Most rátérünk az előbbi részhalmazok részhalmazaira, ugyanis az ortocentrikus és az egyenlő oldalú tetraédereknek egyaránt vannak speciális esetei.

Az ortocentrikus tetraéder speciális esete a háromoldalú szabályos gúla és az olyan tetraéder, amelynek egyik csúcsából kiinduló három éle páronként merőleges egymásra, hiszen mindkét tetraédernek merőlegesek a szemközti élei. (Az utóbbit a következőkben derékszögletű tetraédernek fogom nevezni; derékszögű testszöglet = derékszöglet.) Könnyű megállapítani, hogy van olyan ortocentrikus tetraéder, amely szabályos háromoldalú is, meg derékszögletű is. Ezek alapján a következő halmazábrát készíthetjük el:

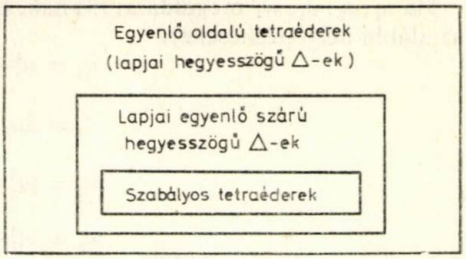


Az ortocentrikus tetraéderek osztályozása pedig:

1. Általános ortocentrikus tetraéder (se nem szabályos háromoldalú, se nem derékszögletű).
2. Szabályos háromoldalú, de nem derékszögletű tetraéderek. (Ennek a halmaznak részhalmaza a szabályos tetraéderek halmaza.)
3. Derékszögletű, de nem szabályos háromoldalú tetraéderek.

4. Háromoldalú szabályos és egyben derékszögletű tetraéderek.

Végül még az egyenlő oldalú tetraéder speciális eseteit kell tárgyalnunk. Ezek olyan egyenlő oldalú tetraéderek, amelyeknél a köréjük írt paralelepipedon négyzetes oszlop, illetve kocka. Az előbbi tetraéder lapjai egyenlő szárú hegyesszögű háromszögek, az utóbbi tetraéder lapjai pedig egyenlő oldalú háromszögek. Itt a halmazábra egymásba ágyazott halmazokból áll:



BENCZE MIHÁLY
tanár
Brassó

Fibonacci egyik feladatáról

Az 1220-as években Fibonacci megoldotta a racionális számok halmazán az

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} x^2+5 &= y^2 \\ x^2-5 &= z^2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A végeredményt megtalálta, de megoldása nem ismeretes. Korgyemszkij [1] bemutatja a feladat egy mértani megoldását, Nagy Ferenc [2] pedig közli a feladat egy algebrai megoldását.

Az alábbiakban igazoljuk, hogy az (1) egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van a racionális számok halmazán.

Végezzük el (1)-ben a következő helyettesítéseket:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} x &= u/t \\ y &= v/t \\ z &= w/t \end{aligned}$$

ahol legalább u és t relatív prímszámok. Ez azt jelenti, hogy legalább x irreducibilis tört. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} u^2+5t^2 &= v^2 \\ u^2-5t^2 &= w^2 \end{aligned}$$

amelyet a természetes számok halmazán kell megoldani.

Könnyen igazolható az alábbi azonosság:

$$\text{(4)} \qquad (m^4+25n^4)^2 \pm 20m^2n^2(m^4-25n^4) = (m^4 \pm 10m^2n^2-25n^4)^2,$$

ahol m és n természetes számok.

Ha u_1, t_1, v_1, w_1 megoldásai (3)-nak, figyelembe véve a (4) relációt és felhasználva az alábbi helyettesítéseket:

$$u_2 = u_1^4 + 25t_1^4$$

$$t_2 = 2u_1 t_1 v_1 w_1$$

$$v_2 = |u_1^4 + 10u_1^2 t_1^2 - 25t_1^4|$$

$$w_2 = |u_1^4 - 10u_1^2 t_1^2 - 25t_1^4|$$

az alábbi azonosság adódik:

$$u_2^2 + 5t_2^2 = v_2^2$$

$$u_2^2 - 5t_2^2 = w_2^2$$

Ez azt jelenti, hogy u_2, t_2, v_2, w_2 is megoldása (3)-nak. Feltevésünk szerint u_1, t_1, v_1, w_1 olyan megoldása volt (3)-nak, ahol legalább u_1 és t_1 relatív prímek. Könnyen igazolható, hogy ekkor legalább u_2 és t_2 is relatív prímek. A fentiek során egy rekurziós összefüggést kaptunk, mégpedig:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n^4 + 25t_n^4 \\ t_{n+1} &= 2u_n t_n v_n w_n \\ v_{n+1} &= |u_n^4 + 10u_n^2 t_n^2 - 25t_n^4| \\ w_{n+1} &= |u_n^4 - 10u_n^2 t_n^2 - 25t_n^4|, \end{aligned} \tag{5}$$

ahol $u_1 = 41, t_1 = 12, v_1 = 49, w_1 = 31$ a (3) egyenletrendszer legegyszerűbb megoldásai. Ez azt jelenti, hogy (3)-nak végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazán. Figyelembe véve (5)-öt a (2) jelölései így módosulnak:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= u_{n+1}/t_{n+1} \\ y_{n+1} &= v_{n+1}/t_{n+1} \\ z_{n+1} &= w_{n+1}/t_{n+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ez azt jelenti, hogy (1)-nek végtelen sok megoldása van a racionális számok halmazán.

Az $x_1 = 41/12$, $y_1 = 49/12$, $z_1 = 31/12$ megoldásokat már Fibonacci is megtalálta.

Az $x_2 = 3\,344\,161 / 1\,494\,696$, $y_2 = 4\,728\,001 / 1\,494\,696$, $z_2 = 113\,279 / 1\,494\,696$ értékeket J. D. Hill [3] számította ki.

Ha (4)-hez hasonló, de más azonosságból indulunk ki, akkor lehetséges, hogy az (5)-höz hasonló, de más rekurziós képleteket kapunk.

Az még nyitott kérdés marad, hogy az (5) és (6) relációk megadják-e az (1) egyenletrendszer összes racionális megoldását vagy sem.

IRODALOM

[1] — B. A. Korgyemszkij: Matematikai fejtörők. (Gondolat Kiadó, Budapest, 1962.)
[2] — Nagy Ferenc: Az elveszett levezetés. (A Matematika Tanítása 1977. 2. szám.)
[3] — J. D. Hill: American Mathematical Monthly, 38. évf., 1931. 299. oldal.

Az iskolai szakfelügyelők országos pályázatáról

Az Országos Pedagógiai Intézet az iskolai szakfelügyeleti munka tapasztalatainak összegyűjtése, terjesztése, összegezése és továbbfejlesztése érdekében 1977 decemberében pályázatot hirdetett a következő témákból:

1. A szakfelügyelet szerepe a nevelő-, oktató-, képzőmunka permanens fejlesztésében, a tanítási-tanulási folyamat korszerűsítésében.

2. A szakfelügyelet hatékony módszerei.

A pályázatra összesen 126 dolgozat érkezett. A bíráló bizottság

az **1.** témában

a 6000 Ft-os I. díjat *Karádi Károlyné* szakfelügyelőnek (Budapest); a 4000 Ft-os II. díjat *Gábori Imréné* szakfelügyelőnek (Pécs); a 3000—3000 Ft-os két III. díjat *dr. Berenc János* tanárnak (Budapest), valamint *Soós László* vezető szakfelügyelőnek és munkaközösségének (Vácszentlászló);

míg a **2.** témában

a 6000 Ft-os I. díjat *dr. Sas Gábor* igazgatónak (Pécs); a 4000 Ft-os II. díjat *Karádi Károlyné* szakfelügyelőnek (Budapest); a 3000—3000 Ft-os két III. díjat *Révay Gyuláné* szakfelügyelőnek (Bakonycsernye), valamint *B. Saár Zsuzsa* szakfelügyelőnek (Budapest) ítélte oda.

Ezenkívül 37 pályázó részesült 1000—1000 Ft-os jutalomban.

A díjakat és a jutalmakat 1978. október 27-én adták át az Országos Pedagógiai Intézetben.

A matematikus kartársak szép sikerrel vettek részt ezen a pályázaton.

Az általános iskolában működők közül 16-an nyújtottak be pályamunkát. Közülük — mint fentebb olvasható — *Karádi Károlyné* az **1.** témából írt dolgozatával I. díjat, a **2.** témából írttal pedig II. díjat nyert. Rajta kívül még *Fehér Károly* szakfelügyelő (Derecske), *Gergely Péter* vezető szakfelügyelő és munkaközössége (Gödöllő), valamint *Koós István* vezető szakfelügyelő (Kisterenye) pályázata is eredményes volt, mert e pályamunkákért szerzőik jutalmat kaptak.

Középiskolában dolgozó matematikaszakos kartársaink közül öten vettek részt a fenti pályázaton. Közülük hárman részesültek jutalomban, mégpedig: *Antal Gábor* szakfelügyelő (Salgótarján), *Incze József* szakfelügyelő (Sárvár) és *Újvári István* tanár (Vác).

A díjazottaknak és jutalmazottaknak ezúton is szeretettel gratulálunk.

Az Országos Pedagógiai Intézet ez év folyamán külön kiadványban szándékozik közzétenni a szakfelügyeleti pályázatra benyújtott legjobb dolgozatokat, illetve azok legsikerültebbnek bizonyult részleteit.

Annak lehetősége is fennáll, hogy a matematikai tárgyú értékes dolgozatok — egészben vagy részben — megjelenjenek A Matematika Tanítása hasábjain (is).

Hámori Miklós

Halmazok. Matematikai logika

A halmazok fogalmának megalkotása a dolgok viszonyának, kapcsolatainak pontos megismeréséhez, a logika a helyes gondolkodás törvényeinek feltárásához vezet. A könyv célja, hogy ezeknek a ma már tudományokká fejlődött ismereteknek az alapjából néhány gondolatot megvillantson.

A szerző könnyed, játékos, érdekes szövegű példák segítségével, a tanulók színvonalának megfelelően, érthető nyelvezettel tárgyalja az anyagot. Elsősorban az általános iskola 7. és 8. osztályosainak és a középiskola I—II. osztályosainak ajánljuk. (1991)

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Villányi út 74. IV. 23. 1113. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

897. Hozzuk zárt alakra a

$$\sum_{i=1}^{n^2-1} i[\sqrt{i}]^2$$

összeget, ahol $[x]$ az x egészrészét jelenti!

Bencze Mihály, Brassó

898. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész számra teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{2i-1} \leqq \frac{1}{2}\left(n+\sqrt{n^2+8n(2^{2n-1}-1)}\right)$$

egyenlőtlenség!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

899. Bizonyítsuk be, hogy ha f az $[a, b]$ zárt intervallumban pozitív értékű és Riemann-integrálható függvény, továbbá A és B pozitív állandók, akkor minden pozitív egész n-re teljesül az

$$\frac{\int_a^b (f(x)+A)^{n+1}\,dx}{\int_a^b (f(x)+B)^n\,dx} \leqq \frac{\int_a^b f^{n+1}(x)\,dx}{\int_a^b f^n(x)\,dx} + \frac{A^{n+1}}{B^n}$$

egyenlőtlenség!

Geőcze Zoárd Antal László, Cataguases (Brazília)

900. Adott öt város úgy, hogy nincs köztük három vagy több egy egyenesre eső. Négy egyenes szakaszból álló vasúthálózattal kívánják összekötni az öt várost közbeeső állomások nélkül. A szakaszok keresztezése meg van engedve, e helyeken a pályatesteket süllyeszteni, ill. emelni fogják. Hány ilyen vasúthálózat lehetséges?

901. Szerkesszünk háromszöget két oldal összegéből, a közbezárt szögből és az ehhez tartozó szögfelező szakaszból!

Németh László, Vasvár

902. Bizonyítsuk be, hogy ha a négyszög köré is és a négyszöbe is írható kör (sugaruk R, illetve r), és a két kör centrális szakasza d, akkor érvényes az

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}$$

összefüggés!

Feladatmegoldások (885—890.)

885. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2-xy+y^2=1 \tag{1}$$

egyenletnek végtelen sok racionális megoldása van!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

I. megoldás: Az adott egyenlet a valós számok halmazán derékszögű koordináta-rendszerben kúpszeletet határoz meg. Ennek egyik pontja az E (1;0) pont. Próbáljunk végtelen sok racionális megoldáshoz jutni azáltal, hogy az E ponton át végtelen sok racionális meredekségű egyenest fektetünk, és meghatározzuk ezek másik közös pontját a kúpszelettel.

Az $y=m(x-1)$ (m racionális) egyenes és a kúpszelet közös pontjainak abszcisszájára helyettesítéssel az

$$(1-m+m^2)x^2+(m-2m^2)x+m^2-1=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk (másodfokú, mert $1-m+m^2$ azonosan pozitív). Ebből az $x=1$, $y=0$ mellett

$$x=\frac{m^2-1}{m^2-m+1}, \quad \text{majd} \quad y=\frac{m^2-2m}{m^2-m+1} \tag{2}$$

is adódik. A (2) által meghatározott pont akkor és csak akkor azonos E-vel, ha $m=2$. Behelyettesítés mutatja, hogy a (2) alatti racionális számpár mindig megoldása (1)-nek. Hogy ebből végtelen sok különböző számpárt kapjunk, vizsgáljuk meg a (2) alatti x függvényt valós m mellett. Minthogy a $+\infty$ helyen vett határértéke 1, ebből azt sejtjük, hogy valamilyen m értéktől kezdve szigorúan monoton. Nézzük pl. az

$$x(m_1)<x(m_2)$$

egyenlőtlenséget. Ez ekvivalens az

$$(m_1-m_2)((m_1-2)(m_2-2)-3)>0$$

egyenlőtlenséggel. Az utóbbi biztosan teljesül, ha

$m_1>m_2>2+\sqrt{3}$. Eszerint $2+\sqrt{3}$-nál nagyobb m-ekre az x függvény szigorúan csökkenő.

Ha tehát m végigfut tetszőleges, $2+\sqrt{3}$-nál nagyobb értékeket felvevő szigorúan növekvő racionális m_n sorozaton, akkor (2)-ből az x_n sorozat szigorúan csökkenő, és ezáltal valóban végtelen sok racionális megoldást adtunk meg.

Gaál László, Sepsiszentgyörgy

II. megoldás: Tegyük fel, hogy a racionális $(x;y)$ számpár kielégíti (1)-et. Ebből következik, hogy $(x;y)$ megoldása az (1)-ből nyert

$$x(x-y)=(1-y)(1+y) \tag{3}$$

egyenletet is. Az $x=0$-hoz y-ra csak 1 vagy -1 tartozik. Vegyük ki a racionális számpárok halmazából a $(0;-1)$-et, akkor ebből a szűkebb halmazból véve a feltevés szerinti $(x;y)$-t, teljesül rá

$$\frac{x-y}{1+y}=\frac{1-y}{x} \tag{4}$$

is, és mindkét kifejezés értéke ugyanaz a k racionális szám:

$$\frac{x-y}{1+y}=k \quad \text{és} \quad \frac{1-y}{x}=k. \tag{5}$$

Próbáljuk megfordítani az okoskodást: tetszőleges k racionális számhoz keressünk az (5) egyenletrendszert kielégítő $(x;y)$ számpárt. Ha találunk ilyet, akkor végtelen sok racionális $(x(k);y(k))$ megoldást remélünk kapni (1)-re.

Tegyük fel, hogy $(x;y)$ kielégíti (5)-öt, akkor eleget tesz a belőle nyert

$$\begin{aligned} x-y&=k+ky \\ 1-y&=kx \end{aligned} \tag{6}$$

egyenletrendszernek is. Ebből, mivel k^2+k+1 azonosan pozitív,

$$x = \frac{2k+1}{k^2+k+1} \quad \text{és} \quad y = \frac{1-k^2}{k^2+k+1} \tag{7}$$

adódik. Behelyettesítés adja, hogy a (7) számpár kielégíti az (5) egyenletrendszert, ha $1+y$ és x különbözik 0-tól, azaz $k \neq -2$, illetve $k \neq -\frac{1}{2}$, de akkor megoldása (4)-nek, majd (3)-nak és végül (1)-nek is. Hogy végtelen sok különböző racionális számpárt kapjunk, nézzük pl. a (7) alatti x függvényt. Ha k pozitív egész, akkor könnyű látni, hogy az

$$x(k+1) < x(k)$$

egyenlőtlenség ekvivalens az azonosan teljesülő $k^2+2k>0$ egyenlőtlenséggel. Tehát x értékei már akkor végtelen sok különböző racionális számot jelentenek, ha k a pozitív egész számokon fut végig.

Bogdán Zoltán, Cegléd és Szánthó Gyula, Gyula

Megjegyzés: Az (1) egyenlet speciális esete az

$$(a+1)x^2+2(1-a)xy+(a+1)y^2 = 4$$

egyenletnek. Ha a természetes szám, akkor ennek az egyenletnek mindig van végtelen sok racionális megoldása.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 17.

886. A 0-tól különböző valós számok halmazán definiálva van az $a \circ b$ művelet úgy, hogy teljesülnek az

I. $\forall a \, \forall b \, \forall c \quad \dfrac{a \circ b}{c} = (ac) \circ (bc)$,

II. $\forall a \, \forall b \, \forall c \quad (a \circ b) + \dfrac{2}{c} = (a \circ c) + (b \circ c)$

azonosságok. Határozzuk meg az $1977 \circ 1978$ és az $1978 \circ 1977$ valós számokat!

Darvasi Gyula, Nyíregyháza

Megoldás: Tegyük fel, hogy létezik az I—II. tulajdonságokkal rendelkező $a \circ b$ művelet. A feltevés alapján a II-ben b és c helyébe is a-t írva minden a-ra teljesül az

$$(a \circ a) + \frac{2}{a} = (a \circ a) \cdot 2, \quad \text{illetve, az}$$

$$a \circ a = \frac{2}{a} \tag{1}$$

egyenlet. Írjunk a II-ben a és b helyébe 1-et, c helyébe -1-et, akkor (1) tekintetbe vételével teljesül

$$(1 \circ 1) - 2 = 2 \cdot (1 \circ (-1)), \quad \text{azaz}$$

$$2 - 2 = 2 \cdot (1 \circ (-1)). \tag{2}$$

Ez azonban ellentmondást jelent, mert a bal oldali „2—2" jelsorozat a 0-tól különböző valós számok halmazán értelmetlen kifejezés.

Ismeretes, hogy akkor és csak akkor mondjuk, hogy a H nem üres halmazon definiálva van az $a \circ b$ kétváltozós művelet, ha a H elemeiből alkotott minden rendezett elempárhoz hozzá van rendelve H-nak egy-egy eleme. A (2) alatti ellentmondással arra jutottunk, hogy az $(1; -1)$ rendezett párhoz nincs hozzárendelve 0-tól különböző valós szám, tehát nem létezik az I—II. tulajdonságokkal rendelkező művelet. Ezek szerint az $1977 \circ 1978$ és $1978 \circ 1977$ kifejezések értelmetlenek.

Néha megengedjük, hogy a H alaphalmazból vett rendezett elempárok közt legyenek kivételek is: ne tartozzék hozzájuk H-beli elem. Közönséges példa erre az osztás a racionális számok halmazán. Ilyenkor részleges műveletről van szó (lásd pl. Fried: Absztrakt algebra — elemi úton. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972. 196. oldal).

A megoldók a feladat szövegében szereplő „művelet"-be a részleges műveletet is beleértették. Ha ezt meg lehetne engedni, akkor a következő eredményre lehetne jutni:

Írjunk II-ben c helyett is a-t, akkor (1) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$a \circ b = b \circ a.$$

Írjunk II-ben a és b helyébe 1-et, akkor (1) alapján

$$1 \circ c = 1 + \frac{1}{c}$$

adódik.

Írjunk II-ben c helyébe 1-et, akkor az eddigiekből azt nyerjük, hogy az $a \circ b$ művelet csak az

$$a \circ b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

hozzárendelés lehet. Az $(a; b)$ rendezett párhoz akkor és csak akkor nincs hozzárendelve az alaphalmazból szám, ha $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$, azaz ha $a = -b$ teljesül.

Eddig az I. tulajdonságot nem használtuk, meg kell néznünk, nem jutunk-e ellentmondáshoz. Nem jutunk, tehát a kérdezett valós számok: $\frac{1}{1977} + \frac{1}{1978}$.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 17.

887. Állítsuk elő zárt alakban a következő összegeket:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n-k} (-6)^{n-k} \cdot 5^{2k}$;

b) $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{n-k-1} (-6)^{n-k-1} \cdot 5^{2k+1}$.

Kőváry Károly, Budapest

Megoldás: Konkrét n értékek alapján a következő sejtésekhez juthatunk:

a) $$\binom{n}{n}(-6)^n + \binom{n+1}{n-1}(-6)^{n-1} \cdot 5^2 + \binom{n+2}{n-2}(-6)^{n-2} \cdot 5^4 + \ldots +$$

$$+ \binom{2n-1}{1}(-6) \cdot 5^{2(n-1)} + \binom{2n}{0} \cdot 5^{2n} = 3^{2n+1} - 2^{2n+1};$$

b) $$\binom{n}{n-1}(-6)^{n-1} \cdot 5 + \binom{n+1}{n-2}(-6)^{n-2} \cdot 5^3 + \binom{n+2}{n-3}(-6)^{n-3} \cdot 5^5 + \ldots +$$

$$+ \binom{2n-2}{1}(-6) \cdot 5^{2n-3} + \binom{2n-1}{0} \cdot 5^{2n-1} = 3^{2n} - 2^{2n}.$$

A $3^{2n+1} - 2^{2n+1} = 3^{2n} + 3^{2n-1} \cdot 2 + 3^{2n-2} \cdot 2^2 + \ldots + 3 \cdot 2^{2n-1} + 2^{2n}$

azonosság jobb oldala azt az ötletet adja, hogy az összeget fogjuk fel két hatványsor szorzataként nyert hatványsor általános tagja együtthatójának:
az

(1) $$1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \ldots + (2x)^{2n} + \ldots$$

és az

(2) $$1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (3x)^{2n} + \ldots$$

hatványsor szorzatában x^{2n} együtthatója éppen az említett összeg.

(Ismeretes, hogy a $\sum^{\infty} u_i$ és $\sum^{\infty} v_i$ sorok szorzatán a

$$\sum^{\infty} (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1)$$

sort értjük, amely az

$$\begin{array}{llll} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 \dots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & u_2v_4 \dots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & u_3v_4 \dots \\ \vdots & & & \end{array}$$

két bemenetelű táblázatból a „45°-os irányszögű" átlók szerinti összegezéssel jön létre.)

Az (1) és (2) geometriai sor, konvergencia intervallumuk

$$|2x| < 1, \quad \text{illetve } |3x| < 1, \quad \text{azaz}$$

$$|x| < \frac{1}{2}, \quad \text{illetve } |x| < \frac{1}{3}.$$

A két nyitott intervallum metszete az $|x| < \frac{1}{3}$ nyitott intervallum. Ennek belsejében mindkét hatványsor abszolút konvergens. Nézzük ugyanis $|q| < 1$ esetén az

(3) $$1+q+q^2+\dots+q^n+\dots$$

sorhoz tartozó

(4) $$1+|q|+|q^2|+|q^3|+\dots+|q^n|+\dots$$

sort. Az utóbbi egyezik az

$$1+|q|+|q|^2+|q|^3+\dots+|q|^n+\dots$$

sorral, ez pedig $|q|$ hányadosú mértani sor, amely $\|q\| = |q| < 1$ folytán konvergens. Tehát a (3) sor abszolút konvergens.

Az (1) és (2) hatványsorok összege $\frac{1}{1-2x}$, illetve $\frac{1}{1-3x}$, ha $|x| < \frac{1}{3}$.

Ismert tétel értelmében (két abszolút konvergens sor szorzat-sora abszolút konvergens, és összege a két sor összegének szorzata) (1) és (2) szorzatsora $|x| < \frac{1}{3}$ esetén abszolút konvergens, és összege

$$\frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{1-3x},$$

amely $|x| < \frac{1}{3}$ mellett azonosan egyenlő az

(5) $$\frac{1}{1-(5x-6x^2)}$$

törttel. Az (5)' kifejezés az $|x| < \frac{1}{3}$ értelmezési tartományban függvényt ad meg, és ezt $5x-6x^2$ hányadosú mértani sor összegének felfogva $|5x-6x^2| < 1$ esetén hatványsorba fejthetjük.

Az $|5x-6x^2| < 1$, $|x| < \frac{1}{3}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldása a $\left\{x: |x| < \frac{1}{6}\right\}$ halmaz, azaz az $|x| < \frac{1}{6}$ nyílt intervallum.

Ezek szerint az $|x| < \frac{1}{6}$ nyitott intervallumban az (5) kifejezés által adott függvényre két előállítás érvényes:

(6) $$1+(3+2)x+(3^2+3\cdot 2+2^2)x^2+(3^3+3^2\cdot 2+3\cdot 2^2+2^3)x^3+\dots+(3^{2n-1}+3^{2n-2}+$$

$$+3^{2n-3}\cdot 2^2+\dots+3\cdot 2^{2n-2}+2^{2n-1})x^{2n-1}+(3^{2n}+3^{2n-1}\cdot 2+3^{2n-2}\cdot 2^2+\dots+3\cdot 2^{2n-1}+2^{2n})x^{2n}+\dots,$$

illetve

$$1+(5x-6x^2)+(5x-6x^2)^2+\ldots+(5x-6x^2)^n+\ldots \tag{7}$$

A (7) tagjait alakítsuk polinommá:

$$\begin{aligned}1+(5x-6x^2)+(5^2x^2-2\cdot5\cdot6x^3+6^2x^4)+\\+(5^3x^3-3\cdot5^2\cdot6x^4+3\cdot5\cdot6^2x^5-6^3x^6)+\\+(5^4x^4-4\cdot5^3\cdot6x^5+6\cdot5^2\cdot6^2x^6-4\cdot5\cdot6^3x^7+6^4x^8)+\ldots+\\+\left(5^nx^n-\binom{n}{1}5^{n-1}6x^{n+1}+\binom{n}{2}5^{n-2}6^2x^{n+2}-\binom{n}{3}5^{n-3}6^3x^{n+3}+\right.\\+\ldots+\binom{n}{n-1}5\cdot(-6)^{n-1}x^{2n-1}+\left.\binom{n}{n}(-6)^nx^{2n}\right)+\\+\left(5^{n+1}x^{n+1}-\binom{n+1}{1}5^n\cdot6x^{n+2}+\binom{n+1}{2}5^{n-1}\cdot6^2x^{n+3}+\ldots+\right.\\+\binom{n+1}{n-1}5^2\cdot(-6)^{n-1}x^{2n}+\binom{n+1}{n}5\cdot(-6)^nx^{2n+1}+\left.\binom{n+1}{n+1}(-6)^{n+1}\cdot x^{2(n+1)}\right)+\ldots\end{aligned} \tag{8}$$

Szeretnénk (8)-ban a nagy zárójeleket elhagyni, és x hatványai szerint rendezni, majd összevetni (6)-tal. A (7)-ről tudjuk ugyan, hogy konvergens, ez azonban még nem teszi lehetővé a zárójelek elhagyását és az átrendezést.

Próbáljuk felhasználni azt, hogy a (3) sor $|q|<1$ esetén abszolút konvergens: ennek alapján bizonyos, hogy $|x|<\frac{1}{6}$ esetén a (7) sor abszolút konvergens, ami azt jelenti, hogy konvergens az

$$1+|5x-6x^2|+|(5x-6x^2)^2|+|(5x-6x^2)^3|+\ldots, \tag{9}$$

azaz az

$$\begin{aligned}1+|5x-6x^2|+|5^2x^2-2\cdot5\cdot6x^3+6^2x^4|+\\+|5^3x^3-3\cdot5^2\cdot6x^4+3\cdot5\cdot6^2x^5-6^3x^6|+\ldots\end{aligned} \tag{10}$$

sor (az általános tagot a rövidség kedvéért nem írtuk ki). Szeretnénk (10)-ben tagonként venni az összegek abszolútértékét, mert akkor olyan sorhoz jutnánk, amely a (8) nagy zárójeleinek elhagyásával keletkező

$$\begin{aligned}1+5x-6x^2+5^2x^2-2\cdot5\cdot6x^3+6^2x^4+\\+5^3x^3-3\cdot5^2\cdot6x^4+3\cdot5\cdot6^2x^5-6^3x^6+\ldots\end{aligned} \tag{11}$$

sor tagjainak abszolútértékeiből áll. Legyen az x egyelőre negatív, azaz x-re $-\frac{1}{6}<x<0$ teljesüljön, akkor (10)-ben az abszolútérték jelek közti összegek minden tagja negatív vagy pozitív aszerint, hogy (9)-ben a zárójeles összegek kitevője páratlan, illetve páros, ezért (10) egyezik az

$$1+|5x|+|-6x^2|+|5^2x^2|+|-2\cdot5\cdot6x^3|+|6^2x^4|+\ldots \tag{12}$$

sorral. Minthogy (10) konvergens, ezért (12) is konvergens, de akkor (11) abszolút konvergens, és ebből következően — ismert tétel szerint — (11) konvergens is.

Ugyancsak ismert tétel, hogy ha egy konvergens sorban véges sok egymás utáni tagot zárójelbe teszünk, és ezt nagyobb indexű tagokkal újból és újból megismételjük, akkor az így előálló új sor is konvergens, és összege az eredeti sor összege. Ezek szerint (11) összege ugyanaz, mint (8), illetve (7) összege, azaz $\frac{1}{1-5x+6x^2}$.

Mivel (11)-re beláttuk, hogy abszolút konvergens a $-\frac{1}{6}<x<0$ egyenlőtlenségpárt kielégítő x értékekre, ezért ismert tétel szerint átrendezhető, és összege nem változik. Így az (5) kifejezés által

megadott függvény hatványsorát kapjuk:

$$(13)\qquad 1+5x+(-6+5^2)x^2+\left(\binom{2}{1}(-6)\cdot 5+5^3\right)x^3+$$

$$+\left((-6)^2+\binom{3}{1}(-6)\cdot 5^2+5^4\right)x^4+\left(\binom{3}{2}(-6)^2\cdot 5+\binom{4}{1}(-6)\cdot 5^3+5^5\right)x^5+$$

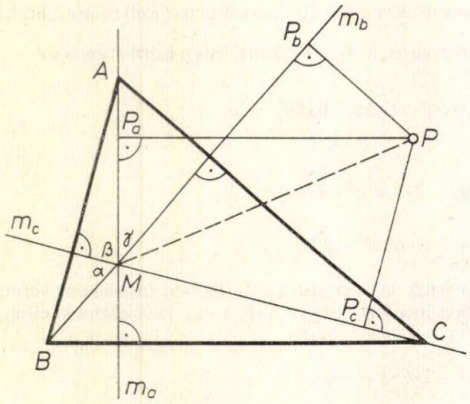
$$+\left((-6)^3+\binom{4}{2}(-6)^2\cdot 5^2+\binom{5}{1}(-6)5^4+5^6\right)x^6+\ldots.$$

Rögzítsünk egyet a $-\frac{1}{6}<x<0$ egyenlőtlenségpárt kielégítő x értékek közül, legyen ez x_0. Ismeretes, hogy ha egy hatványsor egy 0-tól különböző értékre konvergens, akkor az abszolútértékénél kisebb abszolútértékű számokra abszolút konvergens. Ennek értelmében (13) konvergens az $|x|<|x_0|$ egyenlőtlenséget kielégítő x értékekre, ennélfogva alkalmazhatjuk a hatványsorba fejtés unicitásáról szóló ismert tételt. A (13) és a (6) hatványsorok tagról tagra való megegyezése viszont bizonyítja az (*a*) és (*b*) alatti sejtés helyességét.

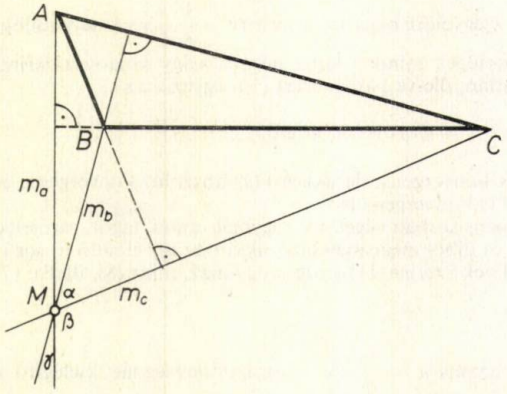
Megoldották: Bartha Gábor, Szentendre; Gaál László, Sepsiszentgyörgy; Kacsó Ferenc, Marosvásárhely; Kamarás Lajos, Pécs és dr. Szikszai József, Miskolc.

888. A háromszög körülírt körének egy pontját vetítsük a háromszög magasságegyeneseire! Igazoljuk, hogy a vetületek által meghatározott háromszög hasonló az eredetihez!

Megoldás: Vegyük fel a körülírt kör P pontját pl. az m_b és m_c egyenesek által előállított négy szögtartomány közül olyanban, amelynek belsején nem halad át az m_a egyenes (lásd az 1. ábrát).



1. ábra



2. ábra

Legyen ez pl. a C csúcsot tartalmazó szögtartomány. A P pontnak a magasságegyenesekre eső vetületét jelöljük P_a-val, P_b-vel, illetve P_c-vel. A vetületekből a P-t az M magasságponttal összekötő szakasz derékszögben látszik, feltéve, hogy P-től és M-től különböznek, továbbá ha P és M is különböző pontok. Thalész tétele értelmében a vetületek rajta vannak a PM szakasz Thalész-körén (ez akkor is igaz, ha a vetületek P-vel vagy M-mel egybeesnek, feltéve, hogy P különbözik M-től). A Thalész-körnek P-t tartalmazó P_bP_c ívén nyugszik a $P_bP_aP_c\sphericalangle$ is és a $P_bMP_c\sphericalangle$ is (esetleg P_a azonos M-mel); mivel az utóbbi α-val egyenlő, ezért $P_bP_aP_c\sphericalangle=\alpha$. Hasonlóan igazolhatjuk, hogy ha P_a és C az m_b-nek ellenkező partján van, akkor $P_aP_cP_b\sphericalangle=P_aMP_b\sphericalangle$, minthogy pedig az utóbbi γ-val egyenlő, ezért a $P_aP_cP_b\sphericalangle$ is γ; ha pedig m_b-nek ugyanazon partján vannak, akkor $P_aP_bP_c\sphericalangle=P_aMP_c\sphericalangle=\beta$. Mindez érvényes akkor is, ha P azonos P_b-vel vagy P_c-vel. Arra jutottunk, hogy az $ABC\triangle$ és a $P_aP_bP_c\triangle$ szögei megegyeznek. Ebből a hasonlóságuk valóban következik.

Vizsgáljuk meg: hol használtuk fel az eddigiekben, hogy P a körülírt kör pontja? Meglepetéssel látjuk, hogy sehol, ezért meggondolásaink a sík bármely, M-től különböző P pontjára érvényesek, legalábbis hegyesszögű háromszögnél. Itt ugyanis a vizsgált m_bm_c szögtartomány szerepét a hat közül bármelyik másik is átveheti.

Még azt kell meggondolnunk, hogy az M körül a magasságegyenesek által létre-

hozott hat szögtartomány a háromszög szögeivel egyenlő. Ez következik abból, hogy például az m_a és m_b által előállított négy szögtartomány közül az a kettő, amelynek belsején nem halad át az m_c, mellékszöge egy háromszög γ-val szemközti szögének, tehát γ-val egyenlő.

Tompaszögű háromszögnél (lásd a 2. ábrát) az M körüli szögtartományok vizsgálata az előbbivel egyező eredményt ad. Az előbbi indokolás követése azonban érdekes eltérésre vezet: M, C, továbbá az m_a és az m_b talppontja most is húrnégyszög négy csúcsa, de M és C szomszédos csúcsok lettek az MC szakasz Thalész-körében. Az m_a és m_b által bezárt azon két szögtartomány, amelynek belsején m_c nem halad át, most a kerületi szögek tétele értelmében egyenlő γ-val. Ugyanez a helyzet m_b-vel és m_c-vel, viszont m_a és m_c szögére változatlanul érvényes az előbbi okoskodás.

Erre az eredményre támaszkodva a hegyesszögű háromszögnél alkalmazott eljárással tompaszögű háromszögre is azt kapjuk, hogy a feladat állítása a sík minden M-től különböző pontjára érvényes.

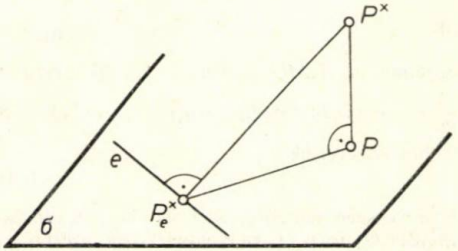
Derékszögű háromszögnél a viszonyok egyszerűbbek, itt is az előző eredményhez jutunk.

Ihász László, Nagybajom; Imolya Sándor, Hódmezővásárhely; Kacsó Ferenc, Marosvásárhely; dr. Szikszai József, Miskolc és Vermes Miklós, Budapest

I. megjegyzés: Érdekes megnézni, hogy a $P_aP_bP_c\triangle$ mikor egybevágó az $ABC\triangle$-gel. Akkor és csak akkor, ha a körülírt körük egybevágó, azaz ha P olyan M középpontú körön van, amelynek sugara az $ABC\triangle$ körülírt körének átmérője.

Vermes Miklós, Budapest

II. megjegyzés: Lépjünk ki az $ABC\triangle$ σ síkjából a térbe. Egy a σ-ra nem illeszkedő $P^\times$ pont vetülete a σ síkon legyen P, a σ sík egy tetszés szerinti e egyenesén pedig $P_e^\times$ (lásd az ábrát). Ha P és $P_e^\times$ különbözők, akkor a vetítések miatt érvényes, hogy $P^\times P \perp e$ és $P^\times P_e^\times \perp e$, tehát e merőleges a $P^\times PP_e^\times$ síkra, de akkor annak $PP_e^\times$ egyenesére is. Ez azt jelenti, hogy P-nek e-re eső vetülete egybe esik $P^\times$-nak e-re vetett vetületével. Ha P és $P_e^\times$ egybeesik, akkor ez egyúttal P vetülete is e-n.



3. ábra

Tehát $P^\times$ vetülete e-n mindig egybeesik P-nek e-re eső vetületével. Emiatt a feladat állítása a tér minden olyan pontjára érvényes, amely nincs az M-ben a σ síkra állított merőlegesen.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely, a megoldók száma: 23.

889. Jelölje az $A_1A_2A_3$ háromszög A_i $(i=1, 2, 3)$ csúcsához tartozó belső szögtartomány által tartalmazott hozzáírt kör középpontját O_i, sugarát ϱ_i, továbbá a körülírt kör középpontját K, sugarát r. Bizonyítsuk be, hogy

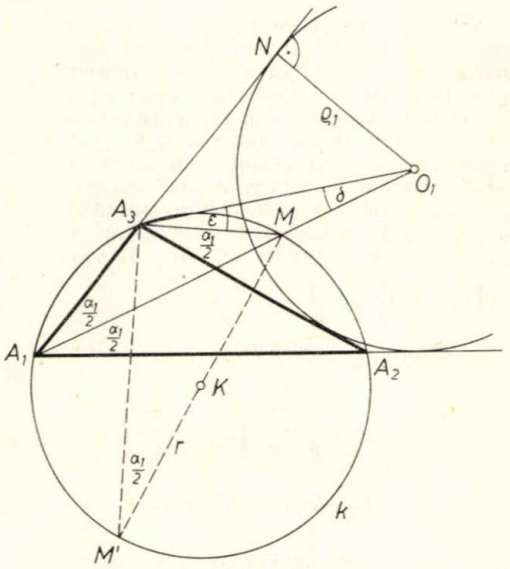
$$KO_i^2 = r^2 + 2r\varrho_i. \tag{1}$$

Megoldás: Először belátjuk, hogy O_i mindig a k körülírt körön kívül van. Jelöljük a háromszög A_i szögét α_i-vel. Az O_1 az α_1 szögfelezőjén van. Ez a szögfelező belső pontban metszi az A_2A_3 oldalt, ezért a szögfelező a k kör A_1-et nem tartalmazó A_2A_3 ívét is belső pontban metszi (M). Ennélfogva az $A_1A_2MA_3$ négyszög húrnégyszög, emiatt ennek M-nél levő szöge $\pi-\alpha_1$. Az O_1 pont az A_2A_3 egyenesnek ugyanazon pontján van, mint M. Nézzük az $A_2O_1A_3$ szöget. Az $A_2O_1A_3\triangle$ másik két szöge:

$$A_2 \sphericalangle = \frac{\pi-\alpha_2}{2}, \quad A_3 \sphericalangle = \frac{\pi-\alpha_3}{2},$$

ezek alapján

$$A_2O_1A_3 \sphericalangle = \frac{\pi-\alpha_1}{2}.$$



4. ábra

Tehát O_1-ből az A_2A_3 oldal kisebb szögben látszik, mint M-ből, ezek alapján ismert tétel értelmében valóban következik, hogy O_1 a k körön kívül van. Ez az indokolás érvényes O_2-re és O_3-ra is.

A feladat állításának bizonyításához vegyük figyelembe, hogy az M pont felezi az A_1-et nem tartalmazó A_2A_3 ívet; ebből a kerületi szögek tétele alapján következik, hogy A_3-nál és M'-nél valóban $\frac{\alpha_1}{2}$ az ábrán megjelölt szög (M' az M-nek K-ra vonatkozó tükörképe). A bizonyítandó állítás ekvivalens a

$$KO_i^2 - r^2 = 2r\varrho_i \tag{2}$$

egyenlettel. A (2) bal oldala éppen az O_i pontnak a k körre vonatkozó hatványa. Az O_1-nek k-ra vonatkozó hatványára érvényes, hogy

$$KO_1^2 - r^2 = O_1M \cdot O_1A_1. \tag{3}$$

Az $A_1O_1N_\triangle \sim M'MA_{3\triangle}$ fennáll, mert derékszögűek és egyik hegyesszögük $\frac{\alpha_1}{2}$. A hasonlóság miatt teljesül az

$$\frac{A_3M}{2r} = \frac{\varrho_1}{O_1A_1}, \quad \text{azaz}$$

$$2r\varrho_1 = A_3M \cdot O_1A_1 \tag{4}$$

egyenlet. Az $A_3MO_{1\triangle}$ azonban egyenlő szárú, hiszen A_3O_1 felezi α_3 mellékszögét, és ennek egyik fele $\frac{\alpha_1}{2}+\varepsilon$, másik fele pedig az $A_1O_1A_{3\triangle}$ külső szöge lévén $\frac{\alpha_1}{2}+\delta$. Ezek miatt valóban igaz, hogy $\varepsilon=\delta$. Ebből következik

$$A_3M = O_1M$$

érvényessége, ennélfogva (3) és (4) jobb oldala egyenlő, de akkor a bal oldalak is. Minthogy pedig mindez O_2-re és O_3-ra is vonatkozik, ezért (2), és ezzel (1) is igazolást nyert.

Több megoldó megjegyezte, hogy a feladat állítása Euler következő tételének analogonja: ha a háromszög köré írható kör sugara r, a beírt köré ϱ, és a két kör centrális szakasza d, akkor érvényes a $d^2=r^2-2r\varrho$ összefüggés (lásd Matematikai Versenytételek I. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965, 40. oldal).

A megoldók száma: 15.

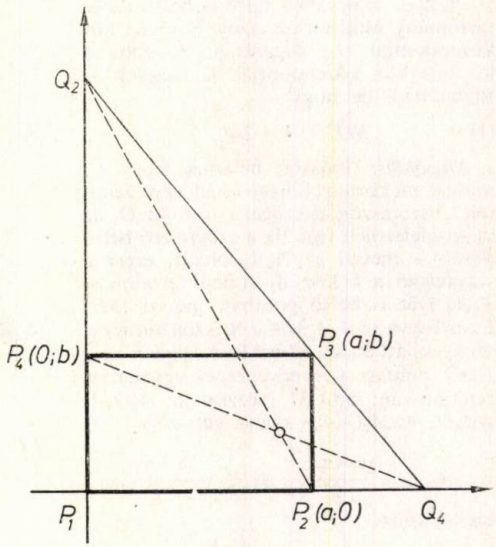
890. Adott a $P_1P_2P_3P_4$ téglalap. A P_3 csúcson át tetszőlegesen húzott egyenes messe a P_1P_2 egyenest Q_4-ben, a P_1P_4 egyenest Q_2-ben! Mi a Q_4P_4 és Q_2P_2 egyenes metszéspontjának halmaza?

Megoldás: Helyezzük el az adott téglalapot derékszögű koordináta-rendszerben az ábra szerint (a; $b>0$). A $P_3(a; b)$ ponton átmenő, az x, illetve az y tengellyel párhuzamos egyenes az euklideszi síkon nem ad metszéspontot az illető tengellyel, ezért ekkor a Q_2P_2, Q_4P_4 egyenesek és a metszéspontjuk sem létezik. A feladat szerinti P_3 ponton átmenő tetszőleges egyenes tehát 0-tól különböző meredekséggel rendelkezik, egyenlete: $y = m(x-a)+b$, ahol $m \neq 0$. Ebből Q_2 $(0;\ b-am)$, $Q_4\left(a-\frac{b}{m};\ 0\right)$, majd

$$P_2Q_2: \quad y = \frac{am-b}{a}(x-a), \tag{1}$$

$$P_4Q_4: \quad y = \frac{bm}{b-am}\left(x+\frac{b-am}{m}\right)$$

adódik, de P_4Q_4 egyenlete csak az $m\neq\frac{a}{b}$ esetre szól. Nézzük meg külön az $m=\frac{b}{a}$ esetet. Ekkor az egyenes a P_1-en is áthalad, és a P_2Q_2



5. ábra

egyenes az origóban metszi a P_4Q_4-et. A továbbiakban tehát az

$$y = m(x-a)+b \quad m \neq 0, \quad m \neq \frac{b}{a} \tag{2}$$

egyeneseket vizsgáljuk. Ezekre Q_2 is, Q_4 is különbözik P_1-től, emiatt pedig a P_2Q_2 és P_4Q_4 egyenes irányszöge 0-tól és $\frac{\pi}{2}$-től különböző.

Tegyük fel, hogy P_2Q_2 és P_4Q_4 metszi egymást. Akkor az (1) egyenletrendszerből

$$x = \frac{a^2m(am-b)}{(am-b)^2+abm} \quad \text{és} \quad y = -\frac{b^2-(am-b)}{(am-b)^2+abm} \tag{3}$$

adódik, ahol nemcsak a számlálók, hanem a nevezők is különböznek 0-tól. Az utóbbi állítás helyességét az $(am-b)^2+abm=\left(am-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$ azonosság mutatja. A behelyettesítés azt adja, hogy az egyedül lehetséges (3) alatti számpár kielégíti az (1) egyenletrendszert.

Ezek szerint a (2) alatti m értékek mindegyikéhez egy-egy keresett pont tartozik, azaz a keresett ξ ponthalmaz a (3) által meghatározott ponthalmaznak és a $\{P_1\}$ halmaznak az egyesítése.

Küszöböljük ki (3)-ból az m-et. Tegyük fel, hogy tetszés szerinti (2) alatti m-hez előállítottuk a (3) számpárt. Akkor $x \neq 0$ és $y \neq 0$, ezért teljesül az

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2}{b^2}\cdot m \quad \text{azaz,} \tag{4}$$

$$m = -\frac{xb^2}{ya^2} \tag{5}$$

egyenlet, és teljesül a (3) alatti első egyenlet is az (5) alatti m értékkel:

$$x = -\frac{xb^2}{ya^2}\,a^2\,\frac{a\cdot\left(-\frac{xb^2}{ya^2}\right)-b}{\left(a\cdot\left(-\frac{xb^2}{ya^2}\right)-b\right)^2+ab\cdot\left(-\frac{xb^2}{ya^2}\right)}. \tag{6}$$

A (6)-ból ekvivalens átalakításokkal a

$$b^2x^2+abxy+a^2y^2-ab^2x-a^2by = 0 \tag{7}$$

egyenlethez jutunk. Ezek szerint minden metszéspont koordinátái kielégítik a (7) egyenletet.

Meg kell néznünk, hogy lépéseink megfordíthatók-e. Ha a (7)-et kielégíti egy $(0; y)$ pont, akkor $y(y-b)=0$, azaz $y=0$ vagy $y=b$ igaz, tehát a $(0; y)$ pont P_1 vagy $P_2\cdot AP_1$-et már külön tekintetbe vettük, P_2 pedig (3)-nál nem jött létre, tehát mindkettőt rekesszük ki. Hasonlót kapunk az $(x; 0)$ pontra, ekkor a P_1-et és a P_4-et hagyjuk figyelmen kívül. Ha most egy 0-tól különböző elemekből álló $(x; y)$ számpár eleget tesz (7)-nek, akkor visszafelé haladva (6) is teljesül. A (6)-ban több helyen előfordul az (5) jobb oldala, ha ez m, akkor teljesül a (4), végül (3) mindkét egyenlete. Azt nyertük tehát, hogy a (7) minden P_1, P_2 és P_4-től különböző pontja előáll (3) alakban az $m\neq 0$, $m\neq\frac{b}{a}$ feltételeket kielégítő m értékkel.

A (7)-ről döntsük el, hogy milyen ponthalmazt határoz meg. A másodrendű görbék ismert elmélete szerint elég megnéznünk a görbe A determinánsának és az A determináns A_{33} aldeterminánsának előjelét (lásd Hajós: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Bp., 1960. 463. oldal). Minthogy $A=-\frac{1}{4}a^4b^4<0$, ezért a görbe nem elfajuló (elfajulónak nevezzük, ha pont vagy egyenes vagy egyenespár); mivel továbbá $A_{33}=\frac{3}{4}a^2b^2>0$, ezért valós vagy képzetes ellipszis. Mivel van pontja, ezért valós ellipszis. Végül tehát ξ az euklideszi síkon a (7)-tel meghatározott, két pontjától (a P_2-től és a P_4-től) megfosztott ellipszis. A projektív síkon a hiányzó két pont csatlakozik még az eddigiekhez, a ξ a (7) által megadott teljes ellipszis.

Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya

I. megjegyzés: A projektív síkon bármely négyszöghöz létezik a feladatban leírt ponthalmaz, és az kúpszelet.

Szilágyi István, Esztergom; dr. Szikszai József, Miskolc és Vigassy Lajos, Budapest

II. megjegyzés: Ha az euklideszi síkon téglalap helyett 60°-os rombuszhoz állítjuk elő a kérdéses ponthalmazt, akkor az két pontjától megfosztott kör.

Kamarás Lajos, Pécs; Szilágyi István, Esztergom; Tóth Gyula, Zirc és Vigassy Lajos, Budapest

A megoldók száma: 15.

A megoldók névsora (885—890.)

Dr. Bakács Istvánné, Bp. (888.); Balogh Imre, Pápa (886.); Bartha Gábor, Szentendre (885—890.); Bencze Mihály, Brassó (885.); Bodnár György, Szerencs (885, 889., 890.); Bogdán Zoltán (885., 886., 888., 889. két mód, 890.); Bognár Ágota, Jánoshalma (888.); Csányi Péter, Nagykőrös (888.); Gaál László, Sepsiszentgyörgy (885—890.); Giczi Margit, Sümeg (886., 888.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Bp. (889.); Hazag Tibor, Bp. (885. két mód, 886.); Ihász László, Nagybajom (886., 888.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (885., 886., 888. két mód, 889.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (885—890.); Kamarás Lajos, Pécs (885—889., 890. három mód); Kondor Judit, Bp. (888—890.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Érd (886.); Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (886., 890.); Kulcsár Károlyné, Szücsi (888.); Kun Péter, Szentendre (885., 886., 888.); Németh László, Vasvár (886., 889.); Polcz Katalin, Pécs (885., 886., 888., 889.); Schutzbach Mártonné, Siófok (888.); Sebestyén László, Bp. (888.); Szánthó Gyula, Gyula (885., 888—890.); dr. Szikszai József, Miskolc (885. három mód, 887., 888., 889. két mód, 890. két mód); Szilágyi István, Esztergom (885., 888., 890.); Tóth Gyula, Zirc (885., 888—890.); Várhelyi Enikő, Marosvásárhely (886.); Vermes Miklós, Bp. (888., 890.); Vigassy Lajos, Bp. (890. két mód); Vitéz Gáborné, Miskolc (885., 886.); Wekszli Árpád, Csorna (885.) és Zsidó Donát, Brassó (886., 888—890.).

KÖNYVISMERTETÉS

GÁDOR ENDRÉNÉ
ny. egyetemi adjunktus
Budapest

Így tanítjuk a matematikát?

A matematikatanítás korszerűsítése már több, mint egy évtizede világszerte napirenden levő feladat. Ennek az az oka, hogy a társadalom életében szinte napról napra növekszik az igény a matematika iránt érdeklődő és azt használni tudó emberek iránt, az iskola pedig egyre kevésbé tudja kielégíteni ezeket az igényeket. (Közismert tény, hogy az iskolát már régebben vagy csak néhány éve elvégzett felnőttek többsége szinte kérkedik azzal, hogy mennyire nem szerette a matematikát és a matematikaórákat.) Ez tette szükségessé azoknak a kísérleteknek megindítását, amelyek célul tűzték ki a matematika megkedveltetését és ennek érdekében a matematikatanítás új alapokra helyezését.

Minthogy a matematika szerepe gyökeresen megváltozott a társadalom életében, ezzel együtt megváltozik a matematikatanítás feladata is. Az iskolának bizonyos matematikai gondolkodásmódot kell kifejlesztenie a tanulókban, ami lehetővé teszi, hogy majd azok is, akiknek munkája nem kíván meg speciális matematikai ismereteket, legalábbis felismerjék, hogy egy bizonyos probléma megoldásához matematikai módszerekre van szükség. Akik pedig valamilyen formában használják a matematikát, képesek legyenek önállóan bővíteni ismereteiket.

Az ilyen gondolkodásmód kialakításához egészen másképpen kell tanítani a matematikát, mint eddig. A módszereket úgy kell megválasztani, hogy ezek biztosítsák a tanulók maximális önállóságát az órákon, vagyis hogy a tanulás kerüljön a tanítási órák középpontjába, a tanár pedig a háttérből irányítsa ezt a munkát. Ugyanakkor az is világos, hogy a kívánt gondolkodásmód alkalmasan kiválasztott ismeretanyagon keresztül alakítható ki eredményesen. Ha tehát a matematikatanítás korszerűsítéséről beszélünk, az egyaránt vonatkozik a tananyagra és a módszerekre is.

A változtatásokat, a korszerűsítést az általános iskolában kell elkezdeni.

Ebben a tanévben jutottunk el odáig, hogy a 15 évvel ezelőtt megkezdett általános iskolai ún. komplex matematikatanítási kísérlet alapján készült tantervet bevezetjük az ország valamenynyi általános iskolájának első osztályába. A felső tagozaton is megkezdődött egy, az eddiginél modernebb tanterv bevezetése. Hiábavaló azonban a legjobb tanterv is, ha a pedagógusokat nem készítik fel kellően az új feladatra, a tanterv eredményes végrehajtására. A felkészüléshez sok segítségre van szükségük, hiszen a matematikának olyan területeivel is meg kell ismerkedniük, amelyekkel talán még sosem találkoztak. Az ismert anyagrészeket is más összefüggésekben kell látniuk. És mindemellett le kell vetkőzniük esetleg több év alatt kialakult módszereket, szokásokat, beidegződéseket. Mindennek előfeltétele egy alapos szemléletbeli változás: belátni, hogy az általános iskolai matematikatanításnak nem az a célja, hogy jól-rosszul elsajátíttassa a gyerekekkel a négy alapműveletet a racionális számok körében; a geometria pedig nem azonos

a kerület- és területszámítással, ahol ezeket az alapműveleteket jól lehet gyakoroltatni.

Az új matematika-tanterv bevezetéséhez az általános iskolai tanárok sokféle segítséget kaptak és kapnak folyamatosan. Említsük meg a tankönyvek mellé adott tanári kézikönyveket, cikkeket, tanfolyamokat, az Iskolarádió és az Iskolatelevízió adásait! Elkészült 1977-ben egy dia-magnó sorozat (továbbképzési anyag diafilmen és magnetofonszalagon), amit minden megyei továbbképzési intézet, illetve kabinet megkapott. Ennek a sorozatnak az az érdekessége, hogy a témák túlnyomó többségét tanárképző főiskolai hallgatók dolgozták ki. A sorozat anyagát — részben átdolgozva — könyvalakba is átírták. A kétkötetes munka címe: Így tanítjuk a matematikát.

A könyv bevezetőjében a szerzők a következőképpen nyilatkoznak: „Célunk az volt, hogy példákat mutassunk arra, hogyan kell az új tanterv elemeit tanítani az általános iskolában". Az új tantervek bevezetésekor egyik szempont a nagyobb tanári szabadság. Az, hogy így *kell* tanítani, módszertani szempontból nemigen hangozhat el. Egy módszertani könyvben legfeljebb bizonyos tanítási lehetőségeket mutathatunk be.

Az első kötet tartalma: Halmazelmélet; Relációk; Függvények és sorozatok; Egyenletek, egyenlőtlenségek; Számelmélet, kongruencia; Számrendszerek; Kombinatorika; Valószínűségszámítás. A második kötet témái: Mérések; Egybevágósági transzformációk; Hasonlóság; Mértani helyek; Topológia; Matematikai statisztika; Számítástechnikai alapismeretek; Matematikai logika.

A felsorolásból látszik, hogy valóban minden téma szerepel itt, amivel egy általános iskolai tanár az órán vagy szakkörön találkozhat.

A két kötetben az egyes témák feldolgozása merőben különbözik egymástól. A második kötet minden fejezetét a kérdéses anyagrész tömör elméletével kezdi, majd ezután tér rá arra, hogy mindebből mi tanítható az általános iskolában. Ez a felépítés nem válik a könyv előnyére. Az elméleti összefoglalás száraz, unalmas, nem is mindig hibátlan. Kivétel a Topológia című fejezet, ami nem akar sokat mondani, egyszerű; akár az osztályban, akár szakkörön használható.

Az elméleti részekre — mindkét kötetben — az jellemző, hogy nagyon sok bennük az elnevezés, amire az általános iskolában semmi szükség. Félő, hogy annál, aki eszerint akar tanítani, az elnevezések fognak eluralkodni. Ne felejtsük el, hogy a könyv azok számára íródott, akik ezeket a témákat nem, vagy csak kevéssé ismerik és tanításukban járatlanok, esetleg nem is szaktárgyuk a matematika!

Le kell szögezni, hogy a szerzők jó szándékát csak dicsérni lehet, ilyen könyvre valóban szükség van. Amellett a könyv külseje nagyon tetszetős, a sok szín, sok ábra (különösen szépek a II. kötetben Csáky Imre pontos, világos, áttekinthető ábrái) igen vonzóvá teszi azt. Nem lehet azonban szó nélkül hagyni, hogy milyen sok a hiba, a tévedés, a pongyolaság a szövegben.

Már említettük, hogy nem szerencsés magának az anyagnak a feldolgozása — különösen a II. kötetben. Ez a tömör, elnevezésektől hemzsegő elméleti összefoglalás annak jó, aki ezt már úgyis tudja és észreveszi a hibákat is. Tipikus példa erre a Geometriai transzformációk vagy a Matematikai statisztika című fejezet. Aki nem tudja, hogy miről van itt szó, az ebből nem fogja megtudni.

A második kötetbeli témák feldolgozására, a bemutatott tanítási módszerre az jellemző, hogy kevés lehetőségük van a tanulóknak az önálló gondolkodásra, a „felfedezésre". Ebből a szempontból is használhatóbb az első kötet. A kezdő számára jobb lett volna minden fejezetben először arról beszélni, amit és ahogyan tanítunk, és ebből elvonni az elméleti ismereteket. Az I. kötet lényegében követi is ezt az utat, bár az elméleti összefoglalás nincs meg mindenütt. A Kombinatorika című fejezetben viszont eluralkodik az elméletieskedés. Kombinatorika címen a permutációk, variációk, kombinációk szerepelnek, noha a fejezet végén megjegyzi a szerző: „Miután felelevenítettük a kombinatorika három alapfeladatát: a permutációk, variációk és kombinációk képzését, tudnunk kell, hogy a feladatok többsége nem ilyen „tiszta" eset, vagyis nem minden esetben használhatók az eddig megállapított képletek. Ezért úgy célszerű megoldatni a tanulókkal a feladatokat, hogy ténylegesen végezzék el a kiválasztásokat."

Jobb lett volna több ilyen „nem tiszta" feladatból is felépíteni ezt a fejezetet és kevésbé hangsúlyozni a „skatulyákat", amelyekbe elhelyezhetők az egyes feladatok. Félő, hogy az ilyen szellemű tanításnak az lesz az eredménye, hogy a tanulók azt keresik majd: melyik skatulyába illik bele a feladat: a permutáció, variáció vagy kombináció feliratúba-e? Holott a kombinatorika bevezetésének a tantervbe éppen nem az a célja, hogy formulákat tanítsunk meg, hanem hogy sokféle érdekes, gondolkodtató feladatot adjunk a tanulóknak, ahol egyébként a szükséges matematikai apparátus nem több, mint a négy alapművelet. A Valószínűségszámítás című fejezetben is hasznosabb lenne a sok fölösleges elnevezés helyett több érdekes játék.

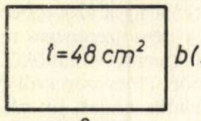
Az egyes fejezetek más szempontból sem egyenletesek. A számrendszerekkel foglalkozó rész például teljesen részletes, szinte megtanítja ezt az anyagot, más fejezetek vázlatosak.

Bántóbb azonban az a sok hiba, ami erősen vitathatóvá teszi a könyv hasznosságát. Közülük csak néhányat sorolunk fel a következőkben:

Több esetben használnak szakkifejezéseket, jelöléseket minden előzmény nélkül. Pl. transzformációs csoport, mozgás, mindenütt sűrű, $\wedge$ (és), környezet.

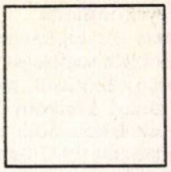
Tipikus példa a formalizmusra (II. kötet 53. oldal):

①



$t = a \cdot b$
$48 = 8x$
$x = 48:8$
$x = 6$ cm

②



$k = 4a$
$48 = 4y$
$y = 48 \cdot 4$
(nyilván sajtóhiba)
$y = 12$ (cm)

Ha a téglalap (egyik) oldala b, akkor miért kell x-szel számolni? Egyenletben csak x vagy y jelölheti az ismeretlent?

Néhány tévedés:

Az I. kötet 17. oldalán a következők olvashatók: „Tekintsük például az egyenlő szárú trapézok halmazát! Ezt jelöljük E-vel. S-sel a szimmetrikus trapézok halmazát jelöljük. Venn-diagrammal ábrázolva látható, hogy S halmaz része E halmaznak. A kapcsolat megfordítható: E halmaz része S halmaznak." Ebből az derül ki, hogy a szimmetrikus trapézok és az egyenlő szárú trapézok halmaza megegyezik. Csakhogy ez nem igaz, mert a paralelogramma (ami nem rombusz és nem téglalap) egyenlő szárú, de nem (tengelyesen) szimmetrikus trapéz.

Ha egy tengelyre felírjuk a tanulók nevét, attól az még nem lett számegyenes (I. kötet 77. oldal).

Ha egy függvénytáblázatot úgy készítünk el, hogy az összetartozó értékpárokat egymás mellé vagy egymás alá írjuk, ez nem kétféle megadási módja a függvénynek (I. kötet 88. oldal).

Az $y = ax$ [$a > 1$ és $0 < a < 1$] függvény képéről megállapítani, hogy nyújtással, illetve összenyomással keletkezett az $y = x$ függvény képéből, nem szerencsés, hiszen ezt úgy is felfoghatják a gyerekek, hogy az origó körüli elforgatással jött létre. Jobb lett volna nem lineáris függvényen bemutatni ezt a transzformációt. (I. kötet 104. oldal.)

I. kötet 105—106. oldal: Az $y = x$ függvény képét tükrözi az y tengelyre, és kiderül, hogy az $y = -x$ függvény képét kapja. Az x tengelyre tükrözve ugyancsak az $y = -x$ függvény képe adódik. Csakhogy le kellett volna szögezni, hogy ez általában nem így van. Jó lett volna más példát is mutatni. Pl. nézzük az $y = x - 2$ függvényt! Az y tengelyre tükrözve grafikonját, az $y = -x - 2$ függvény képét kapjuk, az x tengelyre tükrözve pedig az $y = -x + 2$ függvény képét.

A 110. oldalon az $y = -x + 2$ függvényt vizsgálják. Ennek képe az $y = x$ függvény képéből eltolással és tükrözéssel jött létre. Ezt olvashatjuk: „Ha változtatunk a függvénytranszformációk sorrendjén, ugyanahhoz az eredményhez jutunk." Azt nem közli a szöveg, hogy melyik tengelyre tükröz. Ha az x tengelyre tükrözünk, és a sorrend tükrözés—eltolás, akkor az $y = x$ függvény képéből az $y = -x + 2$ függvény képéhez jutunk. Eltolás—tükrözés sorrendben pedig az $y = -x - 2$ függvény képéhez, tehát a két transzformáció sorrendje nem cserélhető fel. Az y tengelyre tükrözve valóban felcserélhető a sorrend. Ha már a 105. oldalon, az $y = x$ függvény grafikonjának esetében azt állapították meg a kétféle tükrözésről, hogy ugyanahhoz az eredményhez vezetnek (ami abban a speciális esetben igaz is volt), itt már érdemes lett volna megkülönböztetni ezeket egymástól, vagy legalább annyit mondani, hogy az adott feladat esetén az y tengelyre vonatkozó tükrözésről van szó.

A 149. oldalon egyismeretlenes egyenletek megoldását vizsgálják. A szöveg megállapítja, hogy mindegyik egyenlethez a számegyenesnek csak egyetlen pontja rendelhető, majd ez következik: „Figyeljük meg, hogyan változik a megoldások száma, ha az előző egyenleteket egyenlőtlenségekké alakítjuk úgy, hogy az egyenlőségjel helyére „kisebb" vagy „nagyobb" relációjelet írunk!" Szó sincs arról, hogy egyenleteket alakítottak egyenlőtlenségekké — ennek nincs is értelme — hanem az előző feladatok helyett most más feladatok megoldáshalmazát vizsgálják, egyenleteké helyett egyenlőtlenségekét.

A 155. oldalon a következőket olvashatjuk: „Oldjuk meg a két egyenletet grafikusan! (Az $x + y = 8$ és $x - y = 2$ egyenletekről van szó.) A táblázat alapján ábrázoljuk az első és második egyenletet mint függvényt a koordináta-rendszerben!" Ilyet nem szabad leírni!

Az $1 \cdot 24$ cm² területű téglalap más alakú, mint a $24 \cdot 1$ cm²-es? Ugyanitt: „az osztók a téglalap oldalai lesznek." Nem szabad ilyen pongyolán fogalmazni! (162. oldal.)

A 178. oldalon szerepel a következő feladat és megoldása: „Egy kerékpáros és egy motoros egyszerre indul A-ból B felé. A kerékpáros 2 perc 30 másodpercenként tér vissza a kiindulási helyre, a motoros 1 perc 10 másodperc alatt teszi meg ugyanezt az utat. Kérdés: hány másodperc múlva lesznek ismét egyszerre a kiindulási helyen?"

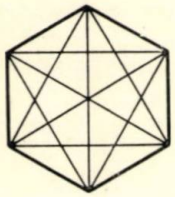
A megoldás így hangzik: „A kerékpáros 150 másodperc alatt, a motoros 70 másodperc alatt teszi meg az utat oda-vissza. A két szám (150 és 70) legkisebb közös többszörösében, 1050-ben valamennyi, az adott számokban szereplő különböző törzstényező fellép az előforduló legnagyobb hatványon. 1050 másodperc annyi, mint 17,5 perc, ennyi idő múlva lesznek ismét egyszerre a kiindulási helyen." Ez igaz, de miért éppen a két szám legkisebb közös többszöröse adja a megoldást? Azért, mert ebben fellép a két

számban szereplő valamennyi különböző törzstényező? A szöveg ugyanis csak erre utal. A megoldásból éppen a lényeg hiányzik.

241. oldal: Meg kell mondani, hogy az ugyanolyan színű gépkocsikat azonosaknak tekintjük, mert különben minden gyerek különbözőnek tekint két különböző rendszámú autót, függetlenül a színétől.

A 243. oldalon a jobb oldali oszlopban összekeverték a permutációkat és variációkat.

Nem igaz az, hogy a páros oldalszámú szabályos sokszögekben az átlók mind egy ponton mennek át (266. oldal).



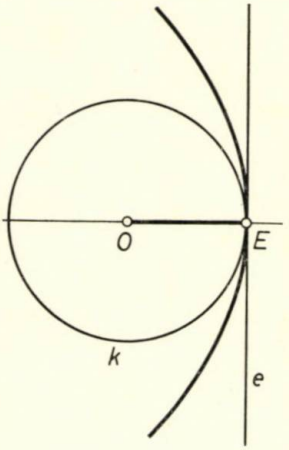
Mit jelent az, hogy az átdarabolás reflexív reláció? Az ábra szerint azt, hogy egy téglalap átdarabolható egy másik téglalapba. (II. kötet 42. oldal.)

A 72. oldalon méréssel megállapítják, hogy az AB és $A'B'$ szakaszok egyenlő hosszúak, tehát ha $A'B'$ az AB szakasz szimmetrikus képe, akkor a két szakasz egyenlő. A dolog szépséghibája az, hogy AB-t és $A'B'$-t ugyanannak a kivágott sablonnak a segítségével rajzolták meg, ezért egyenlő hosszúak. Annak sincs sok értelme, hogy „a sablont a 7 cm hosszú élével helyezzük pontosan a t tengely mellé, húzzuk ki, majd fordítsuk át a sablont és helyezzük pontosan a t-hez...", hiszen a t tengely mentén el is csúsztathatjuk a sablont, és akkor már szó sincs szimmetriáról.

Szerkesztési feladat szerepel a 107. oldalon, amelyhez a könyv minden indokolás nélkül közli a megoldás receptjét. Ebből a gyakorlatlan nevelő arra következtethet, hogy így tanítjuk a matematikát.

116. oldal: „Egy összetett leképezésnek csak akkor van meg egy bizonyos tulajdonsága, ha az összetételben szereplő minden leképezésnek megvan" — ez sajnos nem igaz, mert például két tengelyes tükrözés egymásutánja körüljárástartó leképezés.

A 146. oldalon szerepel a következő feladat: „Határozzuk meg egy egyenestől és körtől egyenlő távolságra levő pontok mértani helyét!" A megoldás *b)* részében azt vizsgálják, hogy mi a mértani hely, ha az e egyenes érinti a k kört. Ekkor az *a)* részben közölt módszert alkalmazva „a keresett mértani hely egy parabola, de kielégítik a feltételt az OE félegyenes pontjai is." Ebben az esetben adott egyenest és kört érintő körök középpontjainak mértani helye egy parabola és az OE egyenes, az O és E pontokat kivéve. A rajzon viszont a parabolát és az OE szakaszt jelölték meg (a végpontok nélkül), mint a keresett mértani helyet.



Lehetne még folytatni a példákat, de talán ennyi is elég.

Összefoglalva: Az „Így tanítjuk a matematikát" nagyon hasznos elgondolás szülötte, de ahhoz, hogy valóban jó segédeszköz legyen az általános iskolai új tanterv megvalósításához, nagyon alapos átdolgozásra, itt-ott átírásra lenne szükség. Meg kellene változtatni a könyv (elsősorban a II. kötet) egyes fejezeteinek szerkezetét, felépítését, kijavítani a hibákat, a pontatlan, néhol félreérthető fogalmazást, többet utalni a tanítás módszerére, és csak annyi elméletet adni, amennyi feltétlenül szükséges, de azt nagyon egyszerűen, közérthetően.

Végül még egy megjegyzés: jó lett volna, ha a könyv végén megtaláljuk a felhasznált forrásmunkák és egyéb idevágó könyvek, cikkek jegyzékét.

Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez

Szerkesztette: *Sain Márton*

Ez a tanári segédkönyv nagy segítséget nyújt a tanárok oktató munkájához, mert a három kötetes feladatgyűjtemény anyagát a felépítés sorrendjében fejezetekre bontva tárgyalja. A feladattípusok megoldásához részletes útmutatást ad. (92 303)

4,50 Ft

Javasolt szakirodalom
a Tankönyvkiadó kiadványai közül

	Fűzve
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: Egyéni matematikatanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681)	16,—
Peller József: A számfogalom fejlesztésének szintjei az oktatási gyakorlatban (52 656)	15,50
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához (92 143)	16,50
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák III. osztályában (92 350)	25,—
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában (92 363)	20,—
Czapáry—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium III. osztályaiban a matematika tanításához (92 151/1)	33,—
Czapáry—Gyapjas—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium IV. osztályaiban a matematika tanításához (92 175/1)	22,—
Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez (92 303). Szerkesztette: Sain Márton	46,—
Hámori Miklós: Ismerkedés a komputerrel. Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205)	10,—
Obádovics—Szelezsán: Bevezetés a programozásba. Számítástechnika II. (29 215)	12,—
Kovács Győző: Számítógépek technikája. Számítástechnika III. (29 217)	15,50
Gyapjas Ferenc: Csoportelmélet (Középiskolai szakköri füzet) (29 227)	11,—
Lukács Ottó: Koordináta-geometria vektorokkal a síkban és a térben (Középiskolai szakköri füzet) (29 219)	13,50
Jakab Albert—Pelle Béla—Perge Imre—Szepessy Bálint: Gyakorlati számolások (29 209)	10,50
Középiskolai matematikai versenyek I., II., III., IV., V—VI., VII—VIII. kötet (29 188 I., 29 188 II., 29 188 III., 29 188 IV., 29 188 V—VI., 29 188 VII—VIII.)	
Halmazok. Matematikai logika (1991)	9,—
Kovács: Néhány kibernetikai játékgép (29 184)	11,50
Ligeti B.—Mosoni Gy.: Törd a fejed, érdemes! (1908/1)	10,—

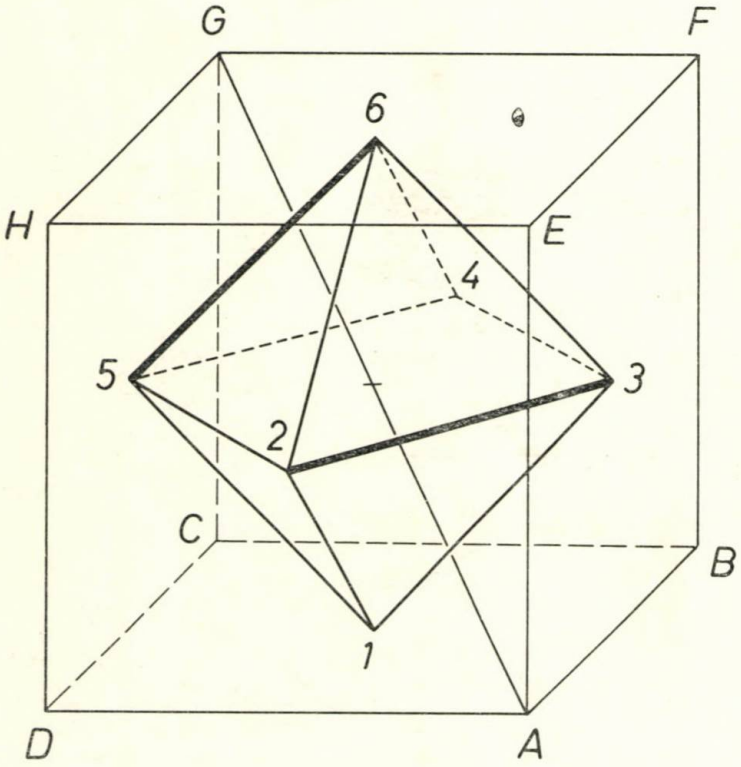
Beszerezhetők
a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum körút 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

Szolnok



1979. május * XXVI. évfolyam 3 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211—200.
79-2128 — Szegedi Nyomda — F.v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalban, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodában (KHI, 1051 Budapest, József nádor tér 1., telefon: 180-850, postacím: *1900 Budapest*) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak az egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Dr. Rédling Elemér: A geometriai gondolkodás fejlődésének szintjei 65
Miskolczi József—Dr. Szilassi Lajos: A térszemlélet fejlesztésének lehetőségei és módszerei a matematikaoktatásban 67
Hódi Endre: A 30. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsga 74
Dr. Elekes György: A kombinatorikus geometriáról. II. rész..... 82

FELADATOK 90

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р Редлинг Элемер: Уровни развития геометрического мышления 65
Мишкольци Йожеф—д-р Силашши Лайош: Возможности и методы развития пространственного соображения в математическом образовании 67
Ходи Эндре: Тридцатый Ежегодный Среднешкольный Конкурс по Математике.. 74
Д-р Элекеш Дердь: О комбинаторической геометрии. Часть II. 82

ЗАДАЧИ 90

INHALT

Dr. Rédling, Elemér: Die Niveaus der Entwicklung des geometrischen Denkens ... 65
Miskolczi, József—Dr. Szilassi, Lajos: Die Möglichkeiten und Methoden der Entwicklung der Raumanschauung in dem Mathematikunterricht 67
Hódi, Endre: Das 30. Jährliche Matematische Examen der Mittelschulen 74
Dr. Elekes, György: Über die kombinatorische Geometrie. II. Teil..... 82

AUFGABEN 90

MEGYEI KÖNYVTÁR Szolnok

Dr. RÉDLING ELEMÉR
főiskolai docens
KKVMF, Székesfehérvár

A geometriai gondolkodás fejlődésének szintjei

Az iskolában tanított geometria a tanulók előtt félig szemléletes, félig formális (vagyis hipotetikus-deduktív felépítésű) diszciplinaként jelenik meg. Az oktatás kezdeti fázisában döntően a szemléletre támaszkodunk. Később fokozatosan csökken a szemlélet szerepe, s megnövekszik a formális következtetések jelentősége. A tanulók látókörében bekövetkező változást a geometriai gondolkodás fejlődésének *szintjeivel* — lépcsőfokaival — lehet jellemezni.

Hasznosnak tartjuk, ha ismerjük a gondolkodási szintek bizonyos rendszerét, mert ez támpontot jelenthet abban, hogy a geometriai ismeretszerzés bonyolult, sok ágból összefonódó folyamatában kellő módon tájékozódhassunk. Ezek a szintek ugyanis a *geometriai gondolkodás fejlődésének lényeges jegyeit* emelik ki.

A szintek ismerete azért is fontos, mert ily módon olyan mércéhez jutunk, amelynek segítségével felmérhetjük geometriaoktatásunk jelenlegi állapotát. A geometria tanítása jobb megszervezésének és az oktatási módszerek tökéletesítésének munkálataiban — véleményünk szerint — támaszkodnunk kell a geometriai szemléletmód szintjének fogalmára. Mindezeket *új* matematika-tantervünk bevezetésekor még inkább figyelembe kell vennünk.

P. H. van HIELE 1958-ban az edinburghi Nemzetközi Matematikai Kongresszuson *„A gyermek gondolkodása és a geometria"* címen tartott előadása nyomán ma a geometria terén öt gondolkodási szintet szokás megkülönböztetni. A következőkben bemutatjuk a fejlődési szintek egy rendszerét. Most elsősorban arra törekszünk, hogy összefoglaljuk s kiemeljük az egyes szintek fontosabb jellemzőit.

I. szint. A „kiindulási" szakaszban a tanulók a geometriai *alakzatokat mint egészeket* fogják fel, nem figyelnek még az alakzat részeire. Nem veszik észre az alakzat elemei, valamint a különböző alakzatok közötti kapcsolatokat. (Nincs még elemzés.) Így például a négyzet és a téglalap számukra két teljesen különböző alakzat. Az egyes alakzatok nevét viszonylag gyorsan megjegyzik.

II. szint. A második fázisban a tanulók már megkülönböztetik az alakzat szembetűnőbb jegyeit. Megállapítanak bizonyos kapcsolatokat az alakzat elemei, valamint a különböző alakzatok között is. *Megkezdődik tehát az alakzatok elemzése.* (A logikai műveletek közül megjelenik az *analízis.*) Az alakzatok tulajdonságait *kísérletileg* (modellezés stb.) állapítják meg. Csak körülírják, de még nem definiálják az alakzatokat. Ezen a szinten az alakzatok saját tulajdonságaik hordozóiként lépnek fel. A megállapított tulajdonságok segítik az alakzatok megkülönböztetését. A tanulók még nem ismerik fel a különböző tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat.

III. szint. Ezen a szinten már elkezdődik az alakzatok logikai rendezése. (Így pl. a tanulók a négyzetet már téglalapnak tekintik.) Azt is felfogják, hogy az egyik tulajdonság a másikból következhet, így *a kísérletek mellett a dedukció* is szerepet kap már (*felismernek* bizo-

nyos *összefüggéseket*). A tanulók azonban még nem látják magának a dedukciónak a jelentőségét.

IV. szint. Ezt a szintet két *fokozatra* oszthatjuk.

Az *első fokozatban* a tanulók már elsajátítják a tananyag egy-egy kisebb témakörében a *lokális rendszerezést* (a „kicsiben vett dedukciót"). Így pl. át tudják már tekinteni a szimmetrikus háromszög, illetve a paralelogramma tulajdonságainak különböző rendszereit. Ezáltal felfogják a *definíció* szerepét is (lásd pl.: [3] 16—21. oldal, [9] 8—15. oldal!).

A *második fokozatban* a tanulók meglátják már az axiómák s a tételek, illetve az alapfogalmak és a származtatott (definiált) fogalmak között fennálló logikai kapcsolatokat. A dedukció kicsiben vett értelme úgy módosul, hogy a tanulók megértik a dedukciónak, mint az egész geometria felépítését és fejlesztését szolgáló módszernek a jelentőségét, felfogják tehát a *deduktív felépítés lényegét* (lásd pl.: [4] 57—71. oldal, illetve [6] 10—16. oldal!).

A IV. szintet tehát az *analízis* és a *szintézis* összefonódása jellemzi.

Az **V. szinten** már elvonatkoztatunk az alakzatok konkrét természetétől s a közöttük levő viszonyok konkrét értelmezésétől is. A geometria egyes ágainak szigorú *axiomatikus felépítése* során tehát a konkrét geometriai interpretálástól is függetlenítjük magunkat. (Így pl. „pontnak", „egyenesnek" mondjuk mindazokat az objektumokat, amelyek eleget tesznek az axiómákban a „pontra", „egyenesre" megfogalmazott követelményeknek.) Nevezhetjük ezt a fokozatot az *általánosítás* szintjének is.

A szintek természetesen nem határolódnak el élesen egymástól, az egyik szintről a következőre való áttérés fokozatosan megy végbe, s a magasabb fokot jelentő szint elemei már korábban megjelenhetnek.

Pszichológiai kutatások igazolták azt a feltevést, hogy a tanulók szemléletének magasabb szintre való fejlődése nem spontán folyamat. A gondolkodásmód fejlődése elsősorban a céltudatos oktatás hatására valósul meg, s ezért nagymértékben függ az oktatás tartalmától és az alkalmazott módszerektől (lásd pl. az [1]-ben!). Az egyes szintek kihagyását egyetlen módszer sem teszi lehetővé. A hatékony módszerek azonban meggyorsítják az egyes szintek elérését. A tanítást úgy kell megszerveznünk, hogy minden egyes szinten már a következő szinteket is előkészítsük.

Véleményünk szerint hazai oktatási rendszerünkben az első két szintre az általános iskola alsó tagozatában kell eljuttatnunk a tanulókat. Mint azt hazai és külföldi kísérletek is mutatják, ez a célkitűzés megvalósítható. A III. szintet az általános iskola felső tagozatában, a IV. szintet pedig a középiskolában célszerű (megközelítően) elérni. Az V. szint követelményeinek megvalósítása már az egyetemek, főiskolák feladata.

Bár helyes lenne, ha az érettségiző tanulók a geometria terén eljutnának a IV. szintre (ezzel a célkitűzéssel találkozhatunk számos külföldi tantervben is), mégis úgy véljük, hogy a IV. szint követelményeinek maradéktalan teljesítésére átlagos felkészültségű osztályban jelenleg még nem törekedhetünk. De a geometriaanyag bizonyos mérvű *szintéziséhez* — legkésőbb az érettségi időszakáig — mindenképpen el kell jutnunk. (Ezt írja elő új középiskolai tantervünk is.) Ezen a téren azonban csak *céltudatos, távlatokban tervező, következetes és türelmes pedagógiai munkával érhetünk el eredményt* (s tekintettel kell lennünk az egyes osztályok eltérő sajátosságaira is). *A szintézis azonban nem lehet csupán a IV. osztály feladata,* az érettségi vizsgákat megelőző néhány órás rendszerezés önmagában *nem elegendő* a szemléleti szint fejlesztésére. (Minderről kísérleteink során is meggyőződ-

hettünk.) *Ez a rendszerezés csak akkor érheti el célját, ha ezt a* tanítás *minden* előző fázisában — az általános iskola 1. osztályától kezdődően — *tudatosan előkészítjük.*

A középiskolában a tanulók geometriai gondolkodásmódjának fejlesztését elsősorban oly módon érhetjük el, hogy a tananyag feldolgozása során — az eddigi gyakorlathoz viszonyítva — fokozottabb mértékben ráirányítjuk a figyelmet a tananyag *belső kapcsolataira.* A tanulók ezekkel tanulmányaik során *rendszeresen találkoznak.* Az összefüggések *„felfedeztetésére"* és *tudatosítására* azonban több figyelmet kell fordítanunk.

Egy további cikkünkben néhány ötlet bemutatásával kívánunk *gondolatokat ébreszteni* a most említett célkitűzések megvalósításához.

IRODALOM

[1] D.B. ELKONYIN—V.V. DAVIDOV: *Életkor és ismeretszerzés* (Tankönyvkiadó, 1972.)
[2] LASZTÓCZI GY.: *A gimnázium új matematika-tantervének ismertetése* (A Matematika Tanítása, 1976/1.)
[3] PELLER J.—RÉDLING E.: *A tanulók tevékenységének tervezése és irányítása* II. (Az ELTE TTK kiadványa, 1973.)
[4] PELLER J.—RÉDLING E.: *A tanulók tevékenységének tervezése és irányítása* III. (Az ELTE TTK kiadványa, 1974.)
[5] RÉDLING E.: *A hasonlóság témakörének felépítéséről* (Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, VII.)
[6] RÉDLING E.: *A párhuzamos szelők problémaköre* (A Matematika Tanítása, 1975/1.)
[7] RÉDLING E.: *A hasonlóság fogalmainak kialakításáról* (A Matematika Tanítása, 1977/2.)
[8] RÉDLING E.: *A geometriai transzformációk bevezetése* (Tolna megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1977.)
[9] RÉDLING E.: *Egybevágósági transzformációk* (Tolna megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1977.)
[10] RÉDLING E.: *Geometriai transzformációk* (Tankönyvkiadó, sajtó alatt.)
[11] A. A. SZTOLJÁR: *A matematikatanítás logikai problémái* (Tankönyvkiadó, 1970.)
[12] B. L. van der WAERDEN: *Klassische und moderne Axiomatik* (Elemente der Mathematik, **22**/1., S. 1—4.)

MISKOLCZI JÓZSEF—Dr. SZILASSI LAJOS
főiskolai adjunktusok
Juhász Gyula Tanárképző Főiskola, Szeged

A térszemlélet fejlesztésének lehetőségei és módszerei a matematikaoktatásban

A köznapi szóhasználatban gyakran lehet hallani, hogy valakinek jó vagy rossz a térszemlélete, kifinomult vagy gyenge a térlátása. Ezek a jelzők mindenki számára bizonyos képességek, készségek meglétét vagy hiányát jelzik, bár feltehető, hogy egészen mást ért térszemléleten a képzőművész, a mérnök, az esztergályos vagy a matematikatanár. Néhány példán keresztül megpróbáljuk megfogalmazni a matematikai térszemlélet fogalmát, rámutatunk arra, hogy a gyakorlati élet, a tanulók ismeretszerzésének folyamata, gondolkodásunk fejlődése milyen kapcsolatban van a térszemlélet fogalmával, végül a teljesség igénye nélkül utalunk néhány lehetőségre, melyek hatékonyan segítik a matematikai térszemlélet fejlesztését.

A térszemlélet fogalmának egyik legszűkebb értelmezését használja Dr. Geréb György—Kiss Ferenc: Tanárjelöltek alkalmassági vizsgálatának néhány pszichológiai kérdése című tanulmánya. A szerzők által használt viszgálati eszköz — a „Geréb-féle térszemlélet-vizsgáló berendezés" — egy kocka terében, három dimenzióban elhelyezett 10 db

izzóból állt, melyeket egy berendezés megadott idősorrendben villantott fel. A vizsgált személynek az előtte fekvő négyzetrácsos papíron kellett megoldani az alábbi feladatot: „Becsülje meg az egyes felvillanó fényforrások térbeli helyzetét! A középen látható, állandóan világító ponthoz viszonyítva határozza meg a felvillanó pontok helyzetét a kockatérben, a jobb felső sarokban látható egységnyi, megvilágított távolság segítségével! A pont helyzetét (koordinátáit) a mellékelt lapon rögzítse! A fény kialvása után írjon!"

Rubinstein szerint a térészlelés a tárgyak térbeli helyzetének, nagyságának, domborzatának, valamint nyugalmának és mozgásának észlelése (Rubinstein, Sz. L.: Az általános pszichológia alapjai. Akadémiai Kiadó, 1978.). Az embernél ez többé-kevésbé hosszú fejlődés eredményeként alakult ki, s ebben a térészlelésben egyre differenciáltabb, adekvátabb tükrözést nyernek a tárgyak, a valóság és tér tulajdonságai és viszonyai. Az említett „térszemlélet-vizsgáló berendezés" használatakor lényegében a térészlelés egy bizonyos részterületének, a távolságbecslés képességének vizsgálatáról van szó.

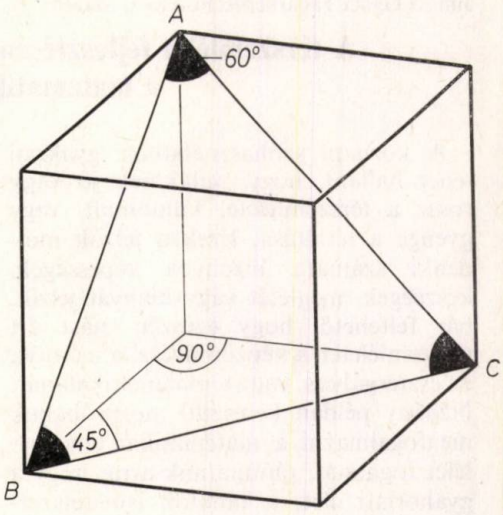
Gyakori jelenség, hogy a térszemlélet értelmezésében (illetve a térszemléletről kialakult intuitív elképzelésekben) túlzott nyomatékkal szerepel a rajzkészség, valamint a reprodukáló vagy rekonstruáló képesség. Ugyanakkor kevésbé jut kifejezésre, hogy annak a képességnek, amellyel a térbeli dolgokat, problémákat elképzeljük, illetve lerajzoljuk, szilárd alapja a tervszerű, céltudatos oktatás, illetve tanulás révén megszerzett és kikristályosodott ismeret. Ezt néhány példával szeretnénk illusztrálni.

1. Adott két kitérő egyenes és egy rájuk nem illeszkedő pont. Lehet-e a megadott pontra síkot illeszteni úgy, hogy az mindkét kitérő egyenessel párhuzamos legyen?

Tapasztalataink alapján arról győződtünk meg, hogy ennél a feladatnál legtöbben a létezés kérdésére konkrét helyzet elképzelésével igyekeznek választ adni. Ha ez nem sikerül, akkor könnyen kijelentik, hogy nincs ilyen sík. Kevesen gondolnak arra, hogy a feladat helyes megoldását a megszerzett ismeretekre támaszkodva keressék, s ha megtalálták, akkor már a „térbeli látás" is könnyebben megy: Egy egyenes akkor párhuzamos egy síkkal, ha párhuzamos a sík valamelyik egyenesével. Ha tehát az adott ponton át egy-egy párhuzamost húzunk a két kitérő egyenessel, az általuk meghatározott sík éppen a keresett sík lesz.

2. Ismeretes, hogy egy szakasznak egy síkra merőleges vetülete kisebb a szakasznál, vagy egyenlő azzal. Érvényes-e hasonló állítás a szögekre? Igaz-e, hogy egy szögnek egy síkra eső merőleges vetülete kisebb a szögnél, vagy egyenlő vele?

Egy alkalmas ábra segítségével könnyen meggyőződhetünk arról, hogy egy szög merőleges vetülete lehet nagyobb is, kisebb is a szögnél. Pl. az 1. ábrán két 60°-os szög közül az egyiknek 45°, a másiknak 90° nagyságú a merőleges vetülete. (Ez a feladat szerepel a középiskolai matematikakönyvben is.)



1. ábra

3. Rajzoljuk le a Möbius-szalagot!

Ez már több rajzkészséget igénylő feladat, még azok számára is problémát jelenthet, akik előtt ott fekszik a szalag modellje. Azonban aki a szalag matematikai lényegét ismeri és megragadja — azt ti., hogy csak egy határvonala van, tehát egyetlen zárt görbét kell rajzolnia — sokkal könnyebben meg tudja oldani a feladatot.

4. Vágható-e a kockán olyan rés, amelyen átfér az eredetivel azonos nagyságú kocka?

Ennél a feladatnál a problémát a két egybevágó kocka megfelelő helyzetviszonyának megkeresése jelenti. Ennek megtalálásában egy ötlet, a képsíkra csúcstengelyével merőleges helyzetű kocka Monge-féle képeinek megrajzolása nyújt segítséget. A képekről — egy kis számítás közbeiktatásával — leolvasható a másik kocka olyan felvételi lehetősége, amely azt mutatja, hogy vágható megfelelő rés (2. ábra).

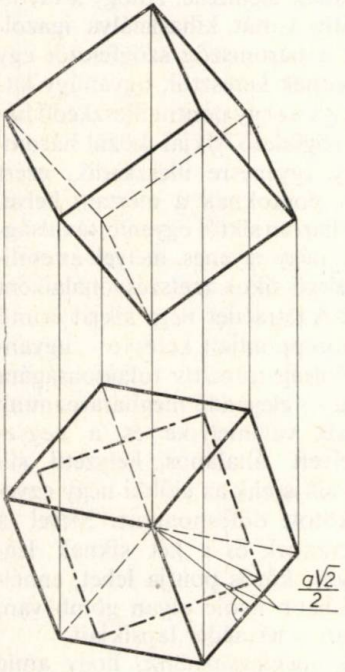
Ugyanis az a élű kockát testátlójára merőleges síkra vetítve olyan szabályos hatszöget kapunk, amelynek beírt köre éppen $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ sugarú; ez egyúttal a másik a élű kocka négyzetvetületének köréírt köre. Egy ilyen négyzet pedig elhelyezhető úgy, hogy minden pontja belsejébe kerüljön a vetületként kapott szabályos hatszögnek.

Sokszor találkozunk — főleg a műszaki gyakorlatban — rekonstrukciós jellegű feladattal:

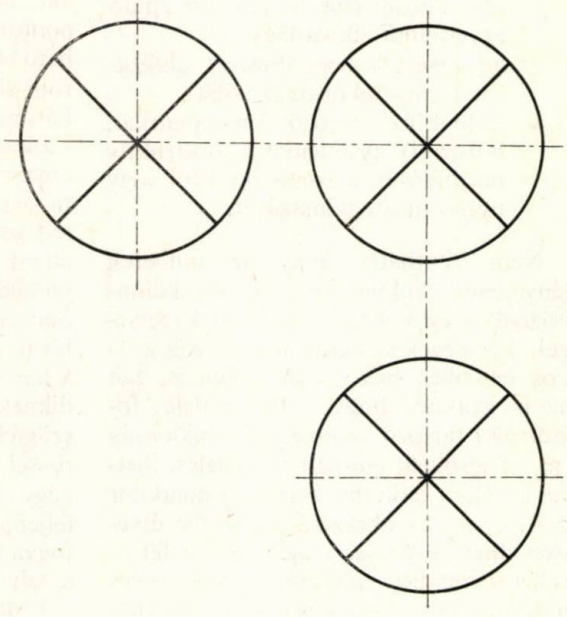
5. A 3. ábrán három egybevágó felület áthatásaként létrejött alakzat vetületi képei láthatók. Milyen felületről van szó?

6. Kitöltik-e hézagtalanul az euklideszi teret két kitérő egyenes transzverzális egyenesei?

Ez az első pillantásra nehéznek tűnő feladat sokkal közelebb kerül hozzánk, ha egy ekvivalens átfogalmazását vizs-



2. ábra



3. ábra

gáljuk: Ha adott két kitérő egyenes, tudunk-e a tér minden pontjára illeszteni a két egyenest metsző (transzverzális) egyenest? Nézzünk meg még „megfoghatóbb" átfogalmazást: Adott a térben két kitérő egyenes és egy pont. Adjuk meg a két egyenest metsző és az adott pontra illeszkedő egyenest! Mikor nem oldható meg a feladat? Ilyen jellegű átfogalmazásokra gyakran van szükség a matematikai feladatok megoldása során, nemcsak a térgeometriában, hanem bármely területen.

A felsorolt feladatokkal, amellett, hogy igyekeztünk bizonyítani a szilárd matematikai ismeretek, a problémamegoldó képesség szükségességét, megpróbáltunk rámutatni a térszemlélet legfontosabb tartalmi jegyeire is.

Matematikai térszemléleten a képességek, készségek olyan matematikailag irányított komplex együttesét értjük, amely lehetővé teszi

a) a térbeli alakzatok alakjának, nagyságának, helyzetviszonyának egzakt elképzelését;
b) a látott vagy elképzelt alakzatoknak a geometria törvényeire épülő egyértelmű ábrázolását;
c) az egyértelműen ábrázolt alakzatok helyes rekonstrukcióját;
d) különböző térbeli (matematikai, műszaki) problémák konstruktív megoldását, a megoldás képi vagy nyelvi megfogalmazását.

Nem vitatható, hogy az emberek lényegesen különbözhetnek és különböznek is egymástól a felsorolt képességek, készségek színvonalában, még azonos feltételek biztosítása esetén is. Sőt az is gyakori, hogy a térszemlélet fogalmába tartozó valamelyik tulajdonság (pl. az elsőként említett térészlelés, illetve térlátás) előtérbe kerül, ugyanakkor mások (pl. az ábrázolás) kevésbé érvényesülnek. Érdemes megfigyelni a felsorolás sorrendjét. Látható, hogy az egyes feltételek teljesítése egyre több matematikai ismeretet, problémamegoldó képességet feltételez, egyre több matematikai tartalommal telítődik. Ezt értjük azon, hogy a térszemlélet matematikailag irányított. Így lehet mondani, hogy bár a térszemlélet részben velünk született adottság terméke, mindenképpen fejleszthető, sőt fejlesztést igénylő tulajdonság. Legfeljebb arról lehet szó, hogy az emberek egy részénél nagyobb, másoknál kisebb energia befektetésével érhetjük el ugyanazt a szintet. Ez viszont más területen is így van.

Jacob Steiner még gyermekkorában helyesen oldotta meg a következő feladatot: Általános esetben hány olyan gömb van, amely érinti a tetraéder minden lapsíkját?

Amíg Steiner kimagasló adottságai révén azonnal „meglátta" a négy síkot érintő gömböket, addig egy átlagos képességű megoldónak erősebben kell támaszkodnia matematikai ismereteire ahhoz, hogy megadja a helyes megoldást.

Egy térgeometriai probléma megoldásában gyakran segít a feladat síkbeli analogonjának elemzése. Ahogy a távolság tranzitív voltát kihasználva igazoljuk, hogy a háromszög szögfelezői egy ponton mennek keresztül, ugyanúgy látható be, hogy az egy pontra illeszkedő három sík szögfelező síkjai közül három-három egy egyenesre illeszkedik, ezért azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek a három síktól egyenlő távolságra vannak, négy egyenes, melyek az említett szögfelező síkok metszésvonalaiként állnak elő. A tetraéder négy síkját érintő gömbök középpontjait keresve — ugyancsak a távolság tranzitív tulajdonságára hivatkozva — elegendő meghatároznunk a három sík valamelyike és a negyediknek felvett általános helyzetű sík szögfelező síkjainak az előbbi négy egyenessel alkotott döféspontjait. Mivel a négy egyenesnek és a két síknak legfeljebb nyolc közös pontja lehet, ennélfogva legfeljebb nyolc olyan gömb van, amely érinti a tetraéder lapsíkjait.

Érdemes megjegyeznünk, hogy amíg bármely háromszög oldalegyeneseit érin-

tő körök száma mindig négy, a térbeli analóg feladat megoldása nem ilyen egyértelmű. Van olyan tetraéder, amelynek lapsíkjaihoz valóban nyolc érintőgömb tartozik, de van olyan is (pl. a szabályos tetraéder), amelyhez csak öt.

Az itt bemutatott megoldás is azt mutatja, hogy (ritka kivételtől eltekintve) csak a szilárd ismeretanyag nyújthat biztonságos alapot egy probléma megoldásához. E példa kapcsán azt is fontos hangsúlyoznunk, hogy a velünk született adottságok — a térszemlélettel kapcsolatosak is — tulajdonképpen az idegrendszer és az agy strukturális sajátosságai. Ezek azonban csak adottságok a térszemlélet kifejlődéséhez, de nem azonosak magával a képességgel.

Az emberi képességek, készségek különbözősége — így a térszemlélet különbözősége is — nemcsak a velünk született adottságokból fakad, hanem jelentős részben a személyiség egész fejlődési folyamatából. Itt kell tehát hangsúlyoznunk az oktatás és nevelés szerepét, felidézve Rubinsteinnek azt a megállapítását, hogy „az ember képességei, amelyek a munkára és a tanulásra való képességet jelentik, a tanulásban és a munkában alakulnak."

Nézzük meg most, hogy a térszemlélet fejlesztésének terén melyek az iskola (ezen belül a matematikaoktatás) legfontosabb feladatai!

Közismert, hogy a napjainkban lezajló tudományos-technikai forradalom egyre fokozottabb igényeket támaszt a felnövekvő nemzedék műszaki, technikai, matematikai — ezeken belül a jó térszemléletet igénylő — ismereteivel szemben. Érdemes lenne alaposabban megvizsgálni, hogy számos szakmában, munkakörben milyen elengedhetetlen feltétele az eredményes munkavégzésnek a jó matematikai térszemlélet.

A térszemlélet fejlesztésének legfontosabb feltétele — mint az az eddigiekből kitűnt —, hogy minél több térélményt, az életkori sajátosságoknak megfelelő szintű térgeometriai problémát, ismeretanyagot nyújtsunk a tanulóknak. Eközben a legmesszebbmenőkig szem előtt kell tartanunk a „szemléletesség" és a „fokozatosság" pedagógiai elvét.

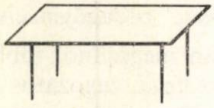
A napjainkban megszűnő, több mint tíz évig használt felső tagozatos általános iskolai matematikakönyvek közel ezer oldalnyi anyagából alig ötven oldal foglalkozott térgeometriával. (A középiskolában talán még ennél is rosszabb az arány.) Ezek a térgeometriai feladatok is szinte kizárólag méretes jellegűek voltak, holott a gyermekek térszemlélete — az életkori sajátosságoknak megfelelően — előbb elsősorban topológiai jellegű, tehát a térszemlélet fejlesztésének lehetőségét is előbb ezen a területen kell keresnünk, s nem a méretes feladatokban.

Azt mondhatjuk, hogy eddig általános iskolai matematikaoktatásunkban — az erre legfogékonyabb korban — elszalasztottuk a jó térszemlélet alapvető kialakításának, a geometriai ismeretek szemléletes megalapozásának lehetőségét.

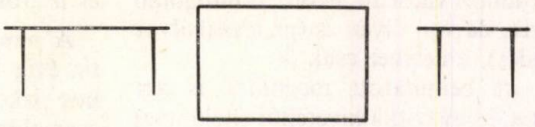
Az új általános iskolai matematikatanterv bevezetésével jelentős előrelépés történt a térgeometriai problémák mennyiségét és tartalmi vonatkozásait tekintve egyaránt. A topológia legszemléletesebb tételeinek (mint pl. Euler poliédertétele) tárgyalása jó lehetőséget nyújt a szemléletesség, a fokozatosság elvének átgondoltabb érvényre juttatására.

Az eddig használt matematika-tankönyvek (és az egyéb népszerűsítő kiadványok is) térgeometriai problémák szemléltetésére a szükségesnél gyakrabban használták az ún. Cavalieri-axonometriát, amely bár könnyebben megrajzolható, de ellentmond a látszati képnek, ezzel szinte tudatosan félrevezeti a tanulókat. Örvendetes, hogy az új tankönyvek és feladatlapok ábrái általában áttekinthetőbbek, szemléletesebbek, az eddigieknél jobban segítik a jó térszemlélet kialakítását.

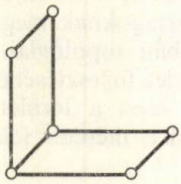
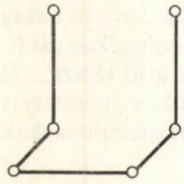
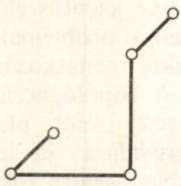
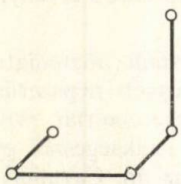
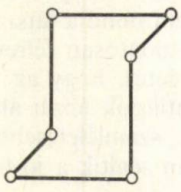
Egy ilyen asztalt megnéztem elölről felülről és oldalról.



Ilyennek láttam:



Készítsd el Babylonból, amiket itt látsz, és rajzold le, milyen a három nézete!

	Elölről	Felülről	Oldalról
			
			
			
			
			

4. ábra

A tanterv és a tankönyvek adta lehetőségek kihasználása jelentős részben a tanár kezdeményezésén, hozzáértésén, ötletgazdagságán múlik. Nem tudjuk eléggé hangsúlyozni — különösen az alsó tagozatban — a modellkészítés (illetve bemutatás) jelentőségét.

A másik jelentős, de elsősorban nem a tanárokon múló lehetőség a gondosan, didaktikai megfontolásokkal szerkesztett, jó kivitelezésű rajzok bemutatása, melyeket a tankönyvekben, feladatlapokon, központilag előállított tablókon, diákon, írásvetítő transzparenseken tehetnénk a tanulók elé. Ezek a valóban magas színvonalú vizuális élményt nyújtó rajzok amellett, hogy nagyban segítenék a tanulók térszemléletének kifejlődését, jelentősen megkönnyítenék a tanárok munkáját is.

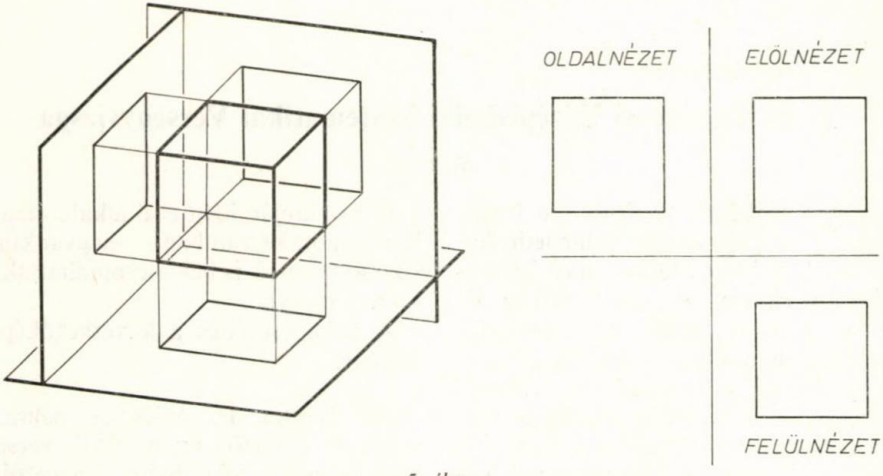
Az itt felsorolt eszközök segítségével el kell érnünk, hogy a tanulók minél kisebb absztrakciós lépéseken keresztül jussanak el egy-egy probléma megoldásához. Ellenkező esetben ugyanis előfordulhat, hogy később nehezen feloldható gátlást, a térgeometria iránti ellenszenvet alakítunk ki a tanulókban.

Nézzünk egy példát arra, hogy egy adott téma feldolgozása milyen lehetőségeket kínál a térszemlélet fejlesztésére (vagy éppen a térgeometriától való elriasztásra)!

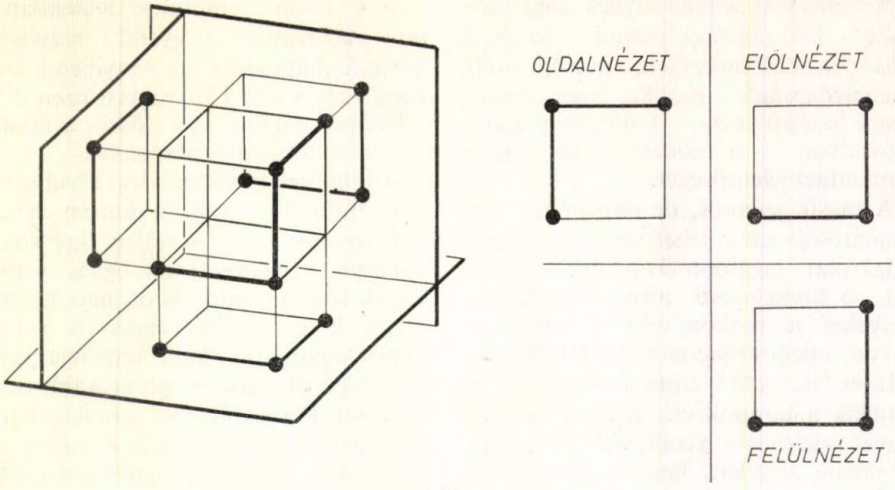
A 4. ábrán bemutatott feladatlap az alsó tagozaton, negyedik osztályban kerül feldolgozásra (amennyiben a tanár nem hagyja ki). Lényegében ezen a feladatlapon találkoznak először a tanulók a vetületi ábrázolás alapjaival.

A jobb helykihasználáson kívül semmi nem indokolja, hogy a három vetületi kép egymás mellé kerüljön. Így sokkal nehezebb felfedezni az egyes vetületi képek közötti kapcsolatot, nem beszélve arról, hogy később éppen a vetületi képek egymáshoz való viszonya jelenti a vetületi ábrázolás legfontosabb összefüggését. Ezt pedig most sem hagyhatjuk figyelmen kívül. A tanulók még a sok időt rabló, de elengedhetetlenül szükséges modellkészítés után is nehezen látják, hogy az alakzatot mihez viszonyítva kell elölről, oldalról stb. nézni. Nem könnyű belátni, hogy ezek az alakzatok éppen egy kocka bizonyos élei, és főleg azt nem, hogy a vetítés iránya ezekkel az élekkel párhuzamos. Az általunk átnézett több, mint száz kitöltött feladatlap alapján azt mondhatjuk, hogy ez a feladatlap — talán nem kellő mélységű előkészítés miatt — túl nehéz feladat elé állította a tanulókat.

Ezeket a feladatokat kisebb részekre bonthatjuk az 5. ábrán látható „minta" vagy „sablon" segítségével, melyet vagy írásvetítőn kivetítve, vagy pl. stencilezett



5. ábra



6. ábra

formában esetleg a táblára előre elkészített rajzon tehetünk a tanulók elé.

Ezen a „sablonon" először a kocka látszati (axonometrikus) képére rajzoljuk rá az ábrázolni kívánt alakzatot (6. ábra). Ebből pedig egyszerűen, szemléletesen adódik a három vetületi kép. Itt már megoldható a pontoknak az ábrázoló geometria szabályai szerinti betűzése is, de ha ez először bonyolultnak tűnik, akkor az is sokat segít, ha a rajzon a modellnek megfelelő különböző színnel jelöljük az egyes csúcsokat. A fedőpontok esetében jelölhetjük pl. a „nem látható" pontot a „látható" pont köré rajzolt megfelelő színű karikával.

Az itt vázolt lehetőség kétségkívül több munkát, alaposabb felkészülést igényel, de úgy véljük, hogy ez minden térgeometriai, a térszemlélet fejlesztését (is) szolgáló probléma tárgyalása esetén így van.

A kívánt eredmény elérése érdekében viszont minden lehetőséget meg kell ragadnunk, hiszen csak így alakulhat ki tanulóinkban a fejlett „matematikai" térszemlélet.

HÓDI ENDRE

osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet

A 30. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsga

I. Bevezetés

A 30. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgát (Thirtieth Annual High School Mathematics Examination; rövidítve: 30. AHSME) ez év március 6-án rendezték meg az egész Egyesült Államokban egyidejűleg.

A Matematika Tanításának 1978. évi 4., valamint 1979. évi 2. számában már hírül adtuk, hogy Oktatási Minisztériumunk Középiskolai Főosztályának engedélye alapján idén első alkalommal — korlátozott létszámban — magyar középiskolai tanulók is bekapcsolódhattak ebbe a versenybe.

A bekapcsolódás a következőképpen történt:

Dr. Walter E. Mientka nebraskai egyetemi tanártól, az AHSME versenybizottságának végrehajtó igazgatójától

előzőleg megkaptuk a tesztfeladatok szövegét (l. alább!), megoldását és a gyors kiértékelést lehetővé tevő kulcsot, úgyhogy a feladatok szövegét jelen cikk szerzője még idejében magyarra fordította, és a magyar fordítást a Bolyai János Matematikai Társulat kellő példányszámban sokszorosította. Az „idejében" szó itt azt jelenti, hogy hazánkban ugyanazon a napon tarthattuk meg a versenyt — kilenc helyen egyidejűleg — mint az Egyesült Államokban.

Magyarországon a nemzetközi matematikai diákolimpiákra felkészítő tíz szakkörnek összesen 213 tagja vett részt a versenyen. (A két fővárosi szakkör részére ugyanott volt a verseny.)

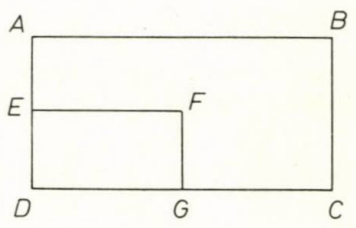
A versenyzőknek 90 perc állt rendelkezésre ahhoz, hogy a 30 tesztfeladat mindegyikére megjelöljék, melyik az egyetlen helyes megoldás a feladatonként kiírt öt különböző eredmény közül. A versenyzők számára a ceruzát javasolták írószerként. Ennek megfelelően megengedett volt nekik fogalmazványpapír, kockás papír, vonalzó, körző és törlőgumi használata, logarlécé és zsebszámológépé azonban nem.

A tanulók által elért összpontszámot a $4H-R+30$ képlet adta meg, ahol H a helyes, R pedig a rossz válaszok számát jelöli. Eszerint a megszerezhető legkevesebb pont 0, a legtöbb 150 volt. E két határ között — hat szám kivételével — elvileg bármely egész pontszámot el lehetett érni. (Szórakoztatásul tűzzük ki az igen tisztelt Olvasónak az elvileg sem elérhető összpontszámok megállapítását.)

II. A feladatok

1. Ha az $ABCD$ téglalap területe 72 m², és E az AD oldal, G pedig a CD oldal felezőpontja, akkor a $DEFG$ téglalap területe négyzetméterben

(A) 8, (B) 9, (C) 12,
(D) 18, (E) 24.



1. ábra

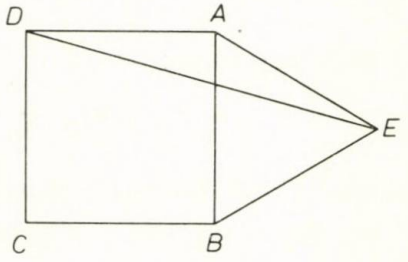
2. Bármely olyan, zérótól különböző x és y valós számokra, amelyek eleget tesznek az $x-y=xy$ egyenletnek, $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ egyenlő

(A) $\frac{1}{xy}$-nal, (B) $\frac{1}{x-y}$-nal, (C) 0-val, (D) -1-gyel,

(E) $y-x$-szel.

3. Az alábbi ábrán $ABCD$ négyzet, ABE egyenlő oldalú háromszög, amelynek E csúcsa kívül esik az $ABCD$ négyzeten. Hány fokos az AED szög?

(A) 10, (B) 12,5, (C) 15,
(D) 20, (E) 25.



2. ábra

4. Minden x valós számra: $x\{x[x(2-x)-4]+10\}+1=$

(A) $-x^4+2x^3+4x^2+10x+1$, (B) $-x^4-2x^3+4x^2+10x+1$,

(C) $-x^4-2x^3-4x^2+10x+1$, (D) $-x^4-2x^3-4x^2-10x+1$,

(E) $-x^4+2x^3-4x^2+10x+1$.

5. Állapítsa meg a számjegyek összegét annak a tízes számrendszerben felírt legnagyobb háromjegyű páros számnak esetében, amely változatlan marad, ha felcseréljük az egyesek és a százasok helyén álló számjegyeit!

(A) 22, (B) 23, (C) 24, (D) 25, (E) 26.

6. $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}-7=$

(A) $-\frac{1}{64}$, (B) $-\frac{1}{16}$, (C) 0, (D) $\frac{1}{16}$, (E) $\frac{1}{64}$.

7. Egy egész szám négyzetét *teljes négyzetnek* nevezzük. Ha x teljes négyzet, akkor a nála közvetlenül nagyobb teljes négyzet

(A) $x+1$, (B) x^2+1, (C) x^2+2x+1, (D) x^2+x,

(E) $x+2\sqrt{x}+1$.

8. Mekkora az $y=|x|$ és az $x^2+y^2=4$ egyenletű görbék által határolt legkisebb tartomány területe?

(A) $\frac{\pi}{4}$, (B) $\frac{3\pi}{4}$, (C) π, (D) $\frac{3\pi}{2}$, (E) 2π.

9. $\sqrt[3]{4}$ és $\sqrt[4]{8}$ szorzata egyenlő

(A) $\sqrt[7]{12}$-vel, (B) $2\sqrt[7]{12}$-vel, (C) $\sqrt[7]{32}$-vel, (D) $\sqrt[12]{32}$-vel, (E) $2\sqrt[12]{32}$-vel.

10. Ha $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ olyan szabályos hatszög, amelybe 2 egységnyi sugarú kört lehet írni, és Q_i-vel jelöljük a P_iP_{i+1} oldal felezőpontját ($i=1, 2, 3, 4$), akkor a $Q_1Q_2Q_3Q_4$ négyszög területe

(A) 6, (B) $2\sqrt{6}$, (C) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, (D) $3\sqrt{3}$, (E) $4\sqrt{3}$.

11. Keresse meg az

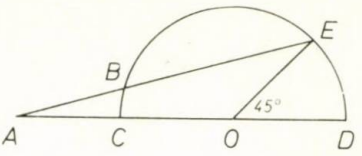
$$\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n}=\frac{115}{116}$$

egyenletnek egy pozitív egész megoldását!

(A) 110, (B) 115, (C) 116, (D) 231,

(E) Az egyenletnek nincs pozitív egész megoldása.

12. Az alábbi ábrán CD egy O középpontú félkör átmérője. Az A pont DC-nek a C-n túli meghosszabbításán helyezkedik el; E a félkör egyik pontja, míg B az AE szakasznak és a félkörnek E-től különböző metszéspontja. Ha AB hossza egyenlő OD hosszával, és az EOD szög 45°-os, akkor a BAO szög nagysága



3. ábra

(A) 10°, (B) 15°, (C) 20°,
(D) 25°, (E) 30°.

13. Az $y-x<\sqrt{x^2}$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

(A) $y<0$ vagy $y<2x$ (vagy mindkét egyenlőtlenség fennáll),
(B) $y>0$ vagy $y<2x$ (vagy mindkét egyenlőtlenség fennáll),
(C) $y^2<2xy$,
(D) $y<0$,
(E) $x>0$ és $y<2x$.

14. Valamely számsorozatban az első elem 1-gyel egyenlő, továbbá minden, 2-nél nem kisebb n-re a sorozat első n elemének szorzata n^2. E sorozat harmadik és ötödik elemének összege

(A) $\frac{25}{9}$, (B) $\frac{31}{15}$, (C) $\frac{61}{16}$, (D) $\frac{576}{225}$, (E) 34.

15. Két egyenlő térfogatú edény mindegyikét alkohololdattal töltötték meg. Az egyik edényben az alkohol és a víz térfogatának aránya $p:1$, a másikban $q:1$. Ha összeöntjük a két edény teljes tartalmát, akkor a keverékben az alkohol és a víz térfogatának aránya (hányadosa)

(A) $\frac{p+q}{2}$, (B) $\frac{p^2+q^2}{p+q}$, (C) $\frac{2pq}{p+q}$,

(D) $\frac{2(p^2+pq+q^2)}{3(p+q)}$, (E) $\frac{p+q+2pq}{p+q+2}$.

16. Egy A_1 területű kör egy nagyobb kör belsejében van, amelynek területe A_1+A_2. Ha a nagyobbik kör sugara 3, továbbá A_1, A_2 és A_1+A_2 egy számtani sorozatnak egymást követő elemei, akkor a kisebbik kör sugara

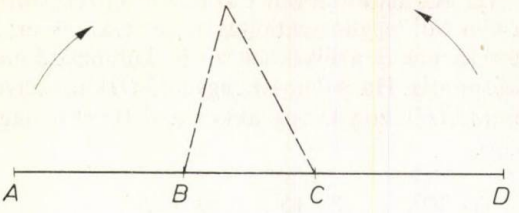
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (B) 1, (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, (D) $\frac{3}{2}$, (E) $\sqrt{3}$.

17. Az egymástól különböző A, B, C és D pontok — a megadott sorrendben — egy egyenesen helyezkednek el. Az AB, AC és AD szakaszok hossza rendre x, y, illetve z. Ha az AB szakasz elforgatható a B pont körül, a CD szakasz pedig a C pont körül úgy, hogy az A és D pontok egybeesve pozitív területű háromszöget alkossanak (a helyben maradt B és C pontokkal), akkor melyik egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, illetve mely egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük a következő három közül:

I. $x < \frac{z}{2}$,

II. $y < x + \frac{z}{2}$,

III. $y < \frac{z}{2}$.



4. ábra

(A) csak az I-nek, (B) csak a II-nak,
(C) csak az I-nek és II-nak,
(D) csak a II-nak és III-nak,
(E) az I-nek, a II-nak és a III-nak is.

18. Három tizedesjegy pontossággal $\log_{10} 2 \approx 0{,}301$ és $\log_{10} 3 \approx 0{,}477$. A következő számok közül melyik közelíti meg legjobban $\log_5 10$ értékét?

(A) $\frac{8}{7}$, (B) $\frac{9}{7}$, (C) $\frac{10}{7}$, (D) $\frac{11}{7}$, (E) $\frac{12}{7}$,

19. Mennyi az

$$x^{256} - 256^{32} = 0$$

egyenletet kielégítő valamennyi valós szám négyzetének összege?

(A) 8, (B) 128, (C) 512, (D) 65 536, (E) $2(256^{32})$.

20. Ha $a = \frac{1}{2}$ és $(a+1)(b+1) = 2$, akkor $\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} b$ értéke radiánban kifejezve

(A) $\frac{\pi}{2}$, (B) $\frac{\pi}{3}$, (C) $\frac{\pi}{4}$, (D) $\frac{\pi}{5}$, (E) $\frac{\pi}{6}$.

(Definíció szerint $\operatorname{arc\,tg} a$ annak a pozitív vagy negatív hegyesszögnek radiánban kifejezett mérőszámát jelenti, amelynek tangense a-val egyenlő; továbbá $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$.)

21. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza h, beírt körének sugara pedig r. Ekkor a kör és a háromszög területének hányadosa

(A) $\frac{\pi r}{h+2r}$, (B) $\frac{\pi r}{h+r}$, (C) $\frac{\pi r}{2h+r}$, (D) $\frac{\pi r^2}{h^2+r^2}$,

(E) egyik sem az előbbiek közül.

22. Adja meg azoknak az egész számokból álló (m, n) számpároknak a számát, amelyek kielégítik az $m^3 + 6m^2 + 5m = 27n^3 + 9n^2 + 9n + 1$ egyenletet!

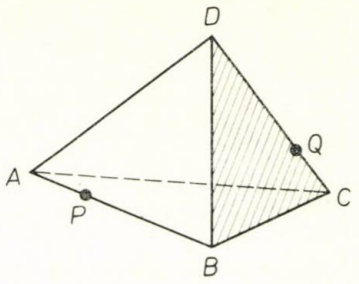
(A) 0, (B) 1, (C) 3, (D) 9, (E) végtelen sok.

23. Az $ABCD$ szabályos tetraéder élei egységnyi hosszúak. Mekkora az AB élen felvett P pont és a CD élen felvett Q pont legkisebb kölcsönös távolsága?

(A) $\frac{1}{2}$, (B) $\frac{3}{4}$,

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

(E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



5. ábra

24. Az (önmagát nem metsző oldalú) $ABCD$ négyszög AB, BC és CD oldalának hossza rendre 4, 5, illetve 20. Ha a B és a C csúcsnál olyan tompaszögek vannak, amelyekre $\sin C = -\cos B = \frac{3}{5}$, akkor az AD oldal hosszúsága

(A) 24, (B) 24,5, (C) 24,6, (D) 24,8, (E) 25.

25. Ha x^8-t osztom $\left(x+\frac{1}{2}\right)$-del, a hányados $q_1(x)$, a maradék pedig r_1; míg $q_1(x)$-et osztva $\left(x+\frac{1}{2}\right)$-del a hányados $q_2(x)$ és a maradék r_2, akkor r_2 egyenlő

(A) $\frac{1}{256}$-tal, (B) $-\frac{1}{16}$-tal, (C) 1-gyel, (D) -16-tal, (E) 256-tal.

26. Az f függvény minden valós x, y számpárra eleget tesz az

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$$

függvényegyenletnek. Ha $f(1)=1$, akkor azoknak az 1-től különböző n egész számoknak a száma, amelyekre $f(n)=n$:

(A) 0, (B) 1, (C) 2, (D) 3, (E) végtelen.

27. Azok közül az egész számokból álló (b, c) rendezett számpárok közül, amelyeknek mindkét eleme abszolút értékben legfeljebb öttel egyenlő, találomra kiválasztunk egyet. Mindegyik ilyen rendezett számpár kiválasztása egyenlően valószínű. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az $x^2+bx+c=0$ egyenletnek *nincsenek* különböző pozitív (valós) gyökei?

(A) $\frac{106}{121}$, (B) $\frac{108}{121}$, (C) $\frac{110}{121}$, (D) $\frac{112}{121}$, (E) egyik sem az előbbiek közül.

28. Három kör középpontja rendre A, B és C. Mindegyikük sugara r, ahol $1<r<2$. Bármelyik két kör középpontjának távolsága 2. Ha B' az A és C középpontú köröknek az a metszéspontja, amely kívül esik a B középpontú körön, továbbá C' az A és B középpontú köröknek az a metszéspontja, amely kívül esik a C középpontú körön, akkor a $B'C'$ szakasz hossza

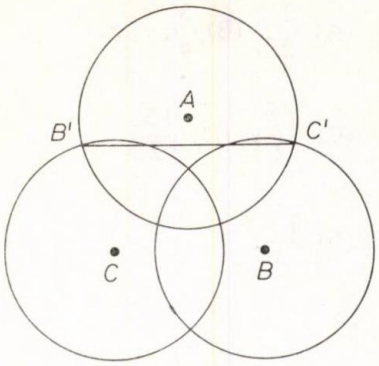
(A) $3r-2$,

(B) r^2,

(C) $r+\sqrt{3(r-1)}$,

(D) $1+\sqrt{3(r^2-1)}$,

(E) egyik sem az előbbiek közül.



6. ábra

29. Legyen az f függvény minden x pozitív számra következőképpen értelmezve:

$$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}.$$

Ekkor $f(x)$ minimális értéke

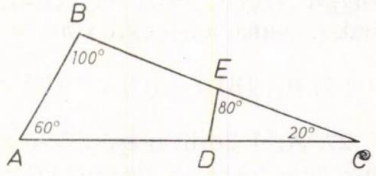
(A) 1, (B) 2, (C) 3, (D) 4, (E) 6.

30. Az ABC háromszögben E a BC oldal felezőpontja, és a D pont rajta van az AC oldalon. Ha AC hossza egységnyi, továbbá $BAC\sphericalangle=60°$, $ABC\sphericalangle=100°$, $ACB\sphericalangle=20°$ és $DEC\sphericalangle=80°$, akkor az ABC háromszög területének és a CDE háromszög kétszeres területének összege egyenlő

(A) $\frac{1}{4}\cos 10°$-kal, (B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$-cal,

(C) $\frac{1}{4}\cos 40°$-kal,

(D) $\frac{1}{4}\cos 50°$-kal, (E) $\frac{1}{8}$-dal.



7. ábra

III. A feladatok helyes megoldása

rendre a következő betűk mellett található:

D—D—C—E—D—A—E—C—E—D—B—B—A—C—E—E—C—C—A—C—B—A—C—E—B—B—E—D—E—B

A magyar versenyzők közül

hárman értek el	57 pontot,	hárman	92 pontot,
egy	58 pontot,	hárman	93 pontot,
egy	59 pontot,	hatan	94 pontot,
ketten	61 pontot,	öten	95 pontot,
ketten	62 pontot,	négyen	96 pontot,
egy	63 pontot,	négyen	97 pontot,
hárman	65 pontot,	négyen	98 pontot,
ketten	66 pontot,	öten	99 pontot,
egy	67 pontot,	nyolcan	100 pontot,
egy	68 pontot,	öten	101 pontot,
hárman	69 pontot,	négyen	103 pontot,
ketten	70 pontot,	heten	104 pontot,
egy	72 pontot,	öten	105 pontot,
hárman	73 pontot,	öten	106 pontot,
hárman	74 pontot,	egy	107 pontot,
öten	75 pontot,	ketten	108 pontot,
hárman	76 pontot,	hatan	109 pontot,
hárman	77 pontot,	hárman	110 pontot,
ketten	78 pontot,	négyen	111 pontot,
ketten	79 pontot,	hatan	112 pontot,
egy	81 pontot,	négyen	113 pontot,
négyen	82 pontot,	hárman	114 pontot,
négyen	83 pontot,	hárman	117 pontot,
hárman	84 pontot,	egy	118 pontot,
heten	85 pontot,	ketten	119 pontot,
hatan	86 pontot,	ketten	120 pontot,
heten	87 pontot,	hárman	121 pontot,
öten	88 pontot,	egy	122 pontot,
nyolcan	89 pontot,	egy	123 pontot,
hatan	90 pontot,	egy	124 pontot,
négyen	91 pontot,	egy	125 pontot,
		egy	128 pontot, végül
		egy	141 pontot.

Úgy véljük, hogy helyénvaló, ha a legjobb eredményt elért versenyzők nevét és iskoláját külön is kiírjuk. A helyezés sorrendjében:

1. *Hajnal Péter,* Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium.
2. *Tóth Viktor,* Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium.
3. *Szoldatics József,* Zalaszentgrót, Beri Balogh Ádám Gimnázium.
4. *Nagy Csaba,* Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium.
5. *Varga József,* Csongrád, Batsányi János Gimnázium és Óvónői Szakközépiskola.
6. *Lévai Péter,* Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium.

7— 9. *Károlyi Gyula,* Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium.
Sárközi Ferenc, Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium.
Varga Lívia, Zalaegerszeg, Ságvári Endre Gimnázium.

10—11. *Baumann Ottó,* Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium.
Dénes László, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium.

Javasoljuk, hogy a szakkörök vezetői részletesen tárgyalják meg szakkörük tagjaival e verseny feladatainak megoldását, és gondosan elemezzék a számunkra szokatlan versenyen való első szereplésből leszűrhető tapasztalatokat.

Végezetül őszinte köszönetünket fejezzük ki az Amerikai Matematikai Társulat középiskolai versenybizottságának, különösen pedig Mientka professzor úrnak, hogy a szükséges anyagok rendelkezésünkre bocsátásával lehetővé tette a f. év nyarán Londonban megrendezendő XXI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára készülő tanulóinknak a 30. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán való, sok tanulságot eredményező részvételét.

DR. ELEKES GYÖRGY
tanársegéd
ELTE TTK Analízis I. tanszék

A kombinatorikus geometriáról. II. rész

Az előző részben a Helly-tétellel és következményeivel foglalkoztunk. Most a következő három témára kerül sor:

1. § Analízisbeli módszerek alkalmazása a geometriában;
2. § Ponthalmazokban fellépő távolságok;
3. § Furcsa halmazok a síkon.

1. § Analízisbeli módszerek

A geometriában elsősorban a következő három, elemi analízisbeli tételt szoktuk használni:

(a) Bolzano tétele: Ha az f függvény folytonos egy intervallumban, és felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor felveszi a 0-t;

(b) Bolzano—Weierstrass-tétel: Az egyenes (sík, tér) bármely korlátos pontsorozatának van konvergens részsorozata.*

(c) Weierstrass tétele: Zárt intervallumban folytonos függvénynek van maximumhelye. (Ennek többnyire a többváltozós variánsát használjuk, de erre most nem térünk ki, mert csak az első két tétel következményeiről lesz szó.)

* Egy síkbeli (térbeli) ponthalmaz vagy pontsorozat *korlátos*, ha van olyan kör (gömb), ami minden elemét tartalmazza. Jelölje $d(X,Y)$ az X, Y pontok távolságát. A *konvergencia* definíciója: $P_n \to P$ ha $\forall$ pozitív ε számhoz $\exists\, n_0(\varepsilon)$ természetes szám, hogy $d(P_n, P) < \varepsilon$, ha $n > n_0(\varepsilon)$. Más, ekvivalens átfogalmazás: $P_n \to P$, ha $d(P_n, P) \to 0$. Fel fogjuk használni, hogy ha $P_n \to P$ és $Q_n \to Q$, akkor $d(P_n, Q_n) \to d(P, Q)$

§ 1/a Bolzano tételének alkalmazásai

Két testvér mindennapos vitája egy karéj vajas kenyér elosztásáról:

— Ne te felezd el! — mondja Péter — A múltkor ugyan egyforma nagy darabokra vágtad, viszont az egyiknek több volt a héja!

— De amikor másnap te osztottad el úgy, hogy ugyanannyi héj jutott mindkettőre, akkor az enyém kisebb lett, mint tiéd! — tiltakozik Pál. (Egy karéj kenyér ritkán szimmetrikus.)

Édesanyjuk segíteni szeretne nekik. El tudja-e vágni egy vágással a kenyeret úgy, hogy mindkét részbe ugyanannyi héj jusson és egyforma nagyok is legyenek? (Tegyük fel, hogy a kenyér szállítás közben nem nyomódott nagyon össze, vagyis a szelet konvex.)

A következő állítás eldönti a kérdést:

1. állítás: *A sík bármely korlátos, konvex H halmaza alkalmas egyenessel két egyenlő területű részre vágható úgy, hogy az egyenes H határvonalát is két, egyenlő hosszúságú részre vágja.*

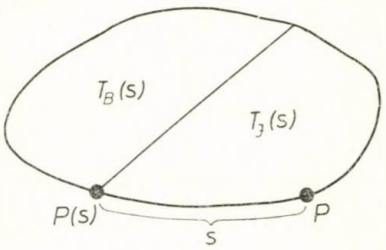
A *bizonyítás* — a szemléletesség kedvéért először vajaskenyér-terminológiában — a következő:

Nevezzük a héj (=határvonal) két pontját átellenesnek, ha a héjat két egyenlő hosszúságú részre osztják!

Futtassuk végig a kés élét a kenyérhéj pontjain úgy, hogy a hegye mindig az éppen érintettel átellenes pont felé mutasson. Ha a kiinduló helyzetben pl. a kés bal oldalára a kenyér belsejének nagyobb darabja jut, akkor az átellenes ponthoz érve, ez a nagyobb darab a jobb oldalra kerül. A bal és jobb oldal különbsége folytonosan változik (lásd később), és pozitívból negatívba megy át, következésképpen közben (Bolzano tétele szerint) valamikor 0 lesz. Ekkor kell vágni.

Ennek a bizonyításnak még komoly hiányosságai vannak. Egyrészt hiányzik a folytonosság igazolása, másrészt még azt sem mondtuk meg, hogy a szóban forgó mennyiség minek függvényében lesz folytonos. Érdemes tehát megnézni, hogyan történik a

precíz bizonyítás: Legyen H kerülete L. Szemeljük ki H határvonalának egy P pontját; a fenti értelemben vele átellenes pont legyen Q. Tekintsük a határvonal egyik darabját. Jelöljük $P(s)$-sel $\left(0 \leqq s \leqq \frac{L}{2}\right)$ e darab azon pontját, melyre a kerület P és $P(s)$ közé eső (rövidebbik) darabjának hossza éppen s (1. ábra). Legyen $P(s)$-ből a vele átellenes pontba irányított szakasz bal (illetve jobb) oldalára eső félsík és H közös részének területe $T_B(s)$ (illetve $T_J(s)$. Ha tudnánk $T_B(s)-T_J(s)$ folytonosságát, akkor így okoskodhatnánk: Ha $T_B(o)-T_J(o)=0$, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben



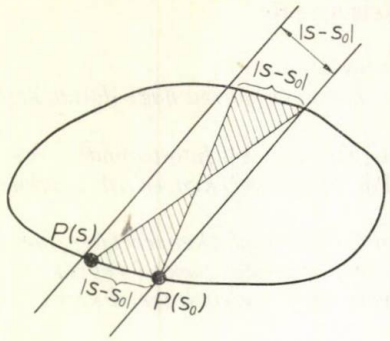
1. ábra

$T_B\left(\frac{L}{2}\right)=T_J(o)$ és $T_J\left(\frac{L}{2}\right)=T_B(o)$ miatt $T_B\left(\frac{L}{2}\right)-T_J\left(\frac{L}{2}\right)=-(T_B(o)-T_J(o))$, így $T_B(s)-T_J(s)$ előjelet vált. Bolzano tétele szerint van olyan s, hogy $T_B(s)-T_J(s)=0$, ami a kívánt szétvágás létezését jelenti.

Hátravan még $T_B(s)-T_J(s)$ folytonosságának igazolása. Ez így történhet:

H korlátos, így befoglalható valamilyen R sugarú körbe. T_B megváltozását így becsülhetjük:

$|T_B(s)-T_B(s_o)| \leqq |s-s_o| \cdot 2R$, mert a megváltozásban szereplő területdarabok (lásd



2. ábra

a 2. ábrát) egy legfeljebb $|s-s_0|$ szélességű sávban helyezkednek el, és részei az R sugarú körlemeznek. Eszerint bármely pozitív ε-hoz $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2R}$-et választva $T_B(s)$ folytonosságát igazoltuk. $T_J(s)$-ről ugyanez hasonló módon belátható, így $T_B(s)-T_J(s)$ valóban folytonos függvénye s-nek.

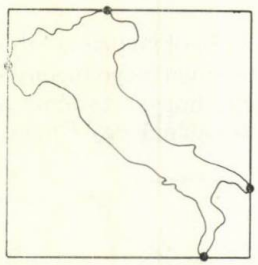
1. feladat: *Igazoljuk, hogy a sík tetszőleges korlátos, T területű alakzata két, egyenként* $\frac{T}{2}$ *területű részre vágható*

(a) adott irányú egyenessel,

(b) adott ponton átmenő egyenessel,

valamint az ilyen alakzat két, egymásra merőleges egyenessel négy, egyenként $\frac{T}{4}$ *területű részre darabolható.*

2. feladat: *Lássuk be, hogy bármely korlátos, síkbeli ponthalmaz befoglalható négyzetbe oly módon, hogy a négyzet minden oldalán az alakzat határának legalább egy pontja legyen* (3. ábra).



3. ábra

Boltjanszkij—Gohberg magyar nyelven is megjelent könyvében [Alakzatok feldarabolása kisebb átmérőjű részekre] szerepel az alábbi

3. feladat:

(a) Bármely korlátos síkbeli ponthalmaz befoglalható (az előző feladatban definiálthoz hasonló értelemben) olyan, középpontosan szimmetrikus konvex hatszögbe, melynek minden szöge 120°-os.

(b) Ha egy ponthalmazban nem fordul elő d-nél nagyobb távolság, akkor befoglalható egy $\frac{d}{\sqrt{3}}$ *oldalú szabályos hatszögbe. (Ebből újabb bizonyítás adódik Jung tételére [I. rész 4. állítás.]*

§ 1/b A Bolzano-Weierstrass tétel egy következménye

2. állítás: *A sík tetszőlegesen adott korlátos H halmazát tartalmazó körlemezek között van legkisebb sugarú.*

Szemléletünk azt sugallja, hogy ennek magától értetődően így kell lennie. A diákok pedig valószínűleg csodálkoznának, hogy ez, vagy a hasonlóan szemléletes egyéb állítások (pl. **1(a) feladat**) egyáltalán bizonyításra szorulnak. Nem is lenne helyes ilyen problémák felvetésével megzavarni őket,

amíg a megoldásukhoz szükséges analízisbeli apparátus ismeretlen előttük. Van azonban ennek egy másik oldala is: amikor már megismerték a folytonosság, határérték fogalmát, többnyire csak konkrét számolással, gondosan preparált függvények vizsgálatával foglalkoznak. Pedig érdemes bemutatni az analízis alkalmazhatóságát az analízistől távol álló (persze nemcsak geometriai) problémákon is.

A **2. állítás** *bizonyítása:* Legyen a H-t tartalmazó körök sugarainak alsó határa (azaz legnagyobb alsó korlátja) r. Belátjuk, hogy található alkalmas r sugarú, H-t tartalmazó kör. Minden n természetes számhoz válasszunk ki egy H-t tartalmazó K_n körlemezt, melynek r_n sugarára $r_n < r + \frac{1}{n}$ teljesül. Jelölje K_n középpontját Q_n. Tetszőlegesen rögzített $A \in H$ esetén $d(A, Q_n) < r + \frac{1}{n} \leqq r+1$, így a Q_n középpontok sorozata az A körüli $(r+1)$-sugarú körlemezen van, azaz korlátos sorozat. A Bolzano—Weierstrass-tétel szerint kiválasztható belőle konvergens Q_{n_k} részsorozat. Legyen $\lim_{k\to\infty} Q_{n_k} = Q$ Tetszőleges $P \in H$-ra az első lábjegyzet szerint

$$d(P, Q) = \lim_{k\to\infty} d(P, Q_{n_k}) \leqq \lim_{k\to\infty} r_{n_k} = r,$$

így a Q körüli r sugarú kör megfelel, hiszen tartalmazza H minden pontját.

Megjegyzések:

1. Legkisebb sugarú befoglaló kör csak egy lehet, mert két r sugarú körlemez közös része r-nél kisebb sugarú körbe is befoglalható.
2. A **3. feladat** új bizonyítást adott Jung tételére. A **2. állítást** és az **I.** rész **3. feladatát** használva még egy harmadik bizonyítás is kapható, ha igazoljuk, hogy a legkisebb sugarú befoglaló kör határvonalán az eredeti H halmaz határának vagy három, hegyesszögű háromszöget meghatározó, vagy két, a körön átellenes pontja van.
3. A fenti állításból levezethető az a (másképp csak sokkal körülményesebben igazolható) tény, hogy korlátos halmaz szimmetriatengelyei egy ponton mennek át (ti. az említett kör középpontján).

4. feladat: *Ha egy síkbeli korlátos H ponthalmaz bármely két pontjának felező merőlegese H-nak szimmetriatengelye, akkor H pontjai mind egy körön vannak.*

2. § Ponthalmazokban előforduló távolságok

5. feladat: *Legyenek $P_1, \ldots, P_n$ a sík tetszőleges pontjai. Jelöljük a közöttük fellépő távolságok közül a legnagyobbat d-vel. Kössük össze egy-egy egyenesszakasszal azokat a pontpárokat, amelyek távolsága éppen d. Igazoljuk, hogy bármely két ilyen maximális szakasznak van közös pontja (azaz vagy metszik egymást, vagy egy végpontjuk közös).*

[Útmutatás: Tegyük fel, hogy a szakaszok között van két, közös pont nélküli. Különböztessünk meg két esetet aszerint, hogy a négy végpont konvex burka háromszög vagy négyszög.]

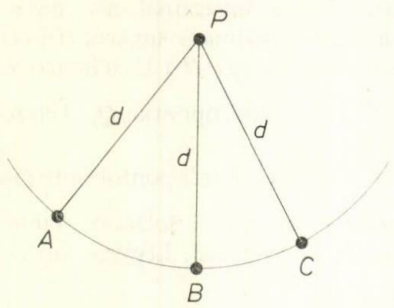
E feladatból egyszerűen igazolható felső korlát adódik a maximális távolságok számára:

3. állítás: *A sík n pontja között a maximális távolság legfeljebb n-szer léphet fel.*

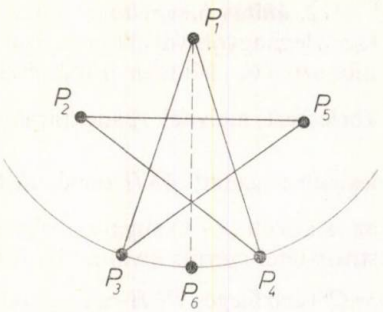
Bizonyítás: Jelöljük ismét d-vel a maximális távolságot, és — mint az előző feladatnál — húzzuk be a d hosszúságú szakaszokat!

1. Először belátjuk, hogy ha a sík valahány pontja között van olyan, amelyre legalább három maximális szakasz illeszkedik, akkor olyan is van közöttük, amelyikre legfeljebb egy. Ha pl. P-től A, B és C egyaránt a maximális d távolságra van, akkor

ezek a P középpontú, d sugarú kör legfeljebb 60°-os ívén helyezkednek el. Legyen pl. B a középső ezen az íven (4. ábra). Ekkor a B-ből induló, d hosszúságú szakaszoknak az **5. feladat** állítása szerint PA-val is, PB-vel is van közös pontjuk. Ilyen szakasz azonban csak maga PB lehet, más nem. Így B-re csak egy maximális szakasz illeszkedhet.



4. ábra



5. ábra

2. Most bizonyítjuk magát az állítást: Ha az n pont között van olyan, amelyre egy d hosszúságú szakasz sem, vagy legfeljebb egy illeszkedik, akkor ezt a pontot hagyjuk el. A maradék pontokra ismételjük ezt addig, amíg lehet. Ha összesen m-szer ismételtük, m pontot hagytunk el és ezzel legfeljebb m maximális szakaszt szüntettünk meg. A végül visszamaradó $(n-m)$ pont között bármelyiktől pontosan két másik van d távolságra. (Mindegyiktől legalább kettő, de három nem lehet, mert akkor olyan is lenne, amitől csak egy.) Így a maradék szakaszok száma szintén $(n-m)$. Mivel legfeljebb m-et hagytunk el, eredetileg legfeljebb n lehetett.

Ennyi valóban el is érhető. Ha n páratlan, akkor pl. a szabályos n-szög n legnagyobb átlója mutatja ezt, páros n-re pedig a szabályos $(n-1)$-szöget kiegészítjük egy ponttal az 5. ábrán látható módon.

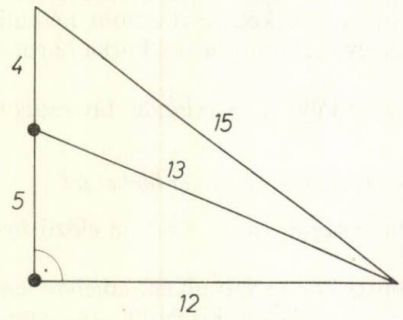
Az 1977. évi Arany Dániel verseny döntőjében szerepelt a következő feladat a kezdők részére:

Egy asztalra n darab tízfilléres pénzdarabot helyeztünk úgy, hogy nem fedik át egymást. Igazoljuk, hogy az érintkezési pontok száma kevesebb, mint $3n$.

Ez a következőképpen fogalmazható át az érmék középpontjaira:

6. feladat: *A sík bármely n pontja között a minimális távolság 3n-nél kevesebbszer fordul elő.*

[Útmutatás: Bármely ponttól legfeljebb hat másik lehet minimális távolságra, és a konvex burok pontjaitól még kevesebb.]



6. ábra

Megjegyzés: A pontos felső korlát $3n-\lceil\sqrt{12n-6}\rceil$; ez el is érhető a síkbeli szabályos háromszögrács alkalmas n pontját választva.

Megadható-e a síkon végtelen sok pont, amelyek nincsenek mind egy egyenesen, hogy a közöttük fellépő összes távolság egész legyen?

(A kérdést ERDŐS PÁL vetette fel, és tőle származik a később ismertetendő válasz is.)

De miért éppen így szól a kérdés? Ha megengednénk, hogy az összes pont egy egyenesen legyen, akkor

lehetne végtelen sok pont között az összes távolság egész? Igen, például ha a szomszédosak távolsága egységnyi. És ha nemkollineáris pontokat keresünk, miért végtelen sokat? Ötven megfelelő pontot, vagy akár csak ötöt vagy négyet olyan könnyű találni? Hármat igen: egész oldalú háromszög sok van. Négy pontnak jó lesz egy téglalap négy csúcsa, ha az oldalak és az átló hossza pitagoraszi számhármast alkot; a 6. ábrán látható pontnégyesről is könnyű ellenőrizni, hogy megfelel. Öt pontot vagy még többet már nehezebb találni, de lehet, ha felhasználjuk, hogy végtelen sok lényegesen különböző pitagoraszi háromszög van.

7. feladat: *Tetszőleges n természetes számhoz megadható a síkban n nemkollineáris pont úgy, hogy közöttük minden távolság egész legyen.*

[*Útmutatás:* A 6. ábra úgy keletkezett, hogy a 3, 4, 5 oldalú pitagoraszi háromszöget felnagyítottuk, hogy egyik befogója 12 egységnyi legyen, és összeillesztettük az 5, 12, 13 oldalú háromszög megfelelő oldalával. Ha $n-2$ pitagoraszi háromszög mindegyikét kinagyítjuk úgy, hogy legyen közös befogójuk, ugyanilyen összeillesztéssel n megfelelő ponthoz jutunk.]

(Valójában még több is igaz: kiköthetjük, hogy semelyik három pont ne legyen egy egyenesen, sőt bármely n-re létezik olyan konvex n-szög is, melynek oldalai és átlói egész hosszúságúak, lásd az **5. állítás** utáni következményt.)

Annál meglepőbb, hogy a kiinduló problémára a válasz tagadó:

4. állítás: *Ha egy ponthalmazban minden távolság egész, és a pontok nincsenek mind egy egyenesen, akkor a halmazban csak véges számú pont lehet.*

(Természetesen ez nem mond ellent a **7. feladat** állításának, hogy a feltételeket teljesítő *bármilyen nagy véges ponthalmaz* létezik, hiszen ebből még nem következik megfelelő *végtelen ponthalmaz* létezése.)

Bizonyítás: Legyen A, B és C három olyan pontja a ponthalmaznak, amelyek nincsenek egy egyenesen. Ekkor $d(A, B)=k$, $d(A, C)=l$ természetes számok. Megmutatjuk, hogy a ponthalmaznak legfeljebb $4(2k+1)(2l+1)$ pontja van. (Ehhez fel fogjuk használni azt az ismert tényt, hogy másodrendű görbéknek — ellipszis, parabola, hiperbola — egymással vagy egy egyenessel legfeljebb négy közös pontjuk lehet.)

Ha egy Q pont a ponthalmazban van, akkor $d(Q, A)-d(Q, B)=q$ (esetleg negatív) egész szám, és a háromszög-egyenlőtlenség miatt $|q|\leqq k$. Így

$d(Q, A)-d(Q, B)$ *lehetséges értékei:*

$-k, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k.$

Ez azt jelenti, hogy a pontrendszer pontjai $(k-1)$ darab hiperbolán és a $-k, k, 0$ értékekhez tartozó két fél- és egy teljes egyenesen helyezkednek el (lásd a $k=3$ esetet a 7. ábrán), vagyis $2k+1$ görbén.

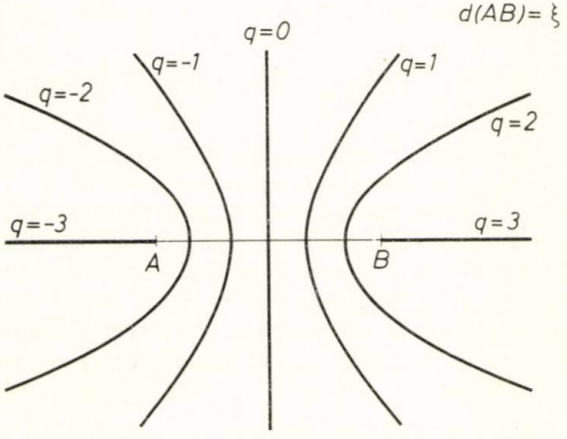
Hasonlóan belátható, hogy

$d(Q, A)-d(Q, C)$

lehetséges értékei:

$-l, \ldots, -1, 0, 1, \ldots l,$

és így újabb $2l+1$ görbét kapunk, amelyek tartalmazzák a pontrendszert.



7. ábra

Az összes pont rajta van tehát a $2k+1$ görbe valamelyikén is, a $2l+1$ görbe valamelyikén is, ezért minden pont valamelyik két görbe metszéspontja. A görbék közül semelyik kettő nem eshet egybe, és a félegyenesek sem fedhetik egymást, mert A, B, C nincs egy egyenesen, így legfeljebb $4(2k+1)(2l+1)$ metszéspont lehet (itt használjuk a másodrendű görbék említett tulajdonságát).

Ezzel az állítást igazoltuk.

Ide kívánkozik még egy *megjegyzés:*

Létezik olyan végtelen, nem egy egyenesbe eső ponthalmaz, amelyben minden távolság racionális.

Ezt a **3.** §-ban fogjuk belátni (**5. állítás**).

3. § Furcsa ponthalmazok a síkon

Halmazaink konstruálásánál fel fogjuk használni azt, hogy ha $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ és $\cos\beta$ racionális, akkor $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ és $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ is az. Használjuk majd — bizonyítás nélkül — azt az ismert tényt is, hogy a 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszög hegyesszögei nem racionális többszörösei π-nek (más szóval, e szögek mérőszáma fokokban mérve irracionális).

5. állítás: *Az egységkörvonalon kiválasztható végtelen sok pont úgy, hogy a köztük fellépő összes távolság racionális legyen.*

Következmény: Tetszőleges n természetes számhoz megadható a síkon olyan konvex n-szög, melynek oldalai és átlói egész hosszúságúak.

(Ez úgy következik az **5. állítás**ból, hogy az ottani ponthalmaz tetszőleges n pontját kiválasztjuk, és a kapott n-szöget alkalmasan felnagyítjuk.)

Az **5. állítás** *bizonyítása:* Ki fogunk választani egy $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, csupa különböző pontból álló sorozatot a Q középpontú egységkörvonalon úgy, hogy az egymás utáni pontokhoz tartozó középponti szögek felének,

$$\alpha_n = \frac{P_n Q P_{n+1}\sphericalangle}{2}\text{-nek}$$

sinusa és cosinusa racionális legyen. Ez már biztosítani fogja azt, hogy bármely i, j-re

$$d(P_i, P_j) = 2\sin\left(\frac{P_i Q P_j\sphericalangle}{2}\right) = \sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_{j-1})$$

racionális lesz az előrebocsátott megjegyzés szerint.

A P_n pontsorozat kiválasztása egyszerű: ha $P_1, \ldots, P_n$-et már kiválasztottuk, akkor olyan α_n szöget kell keresnünk, hogy P_n-et Q körül $2\alpha_n$-nel elforgatva (ez lesz P_{n+1}) az addigiaktól különböző pontot kapjunk, továbbá $\sin\alpha_n$ és $\cos\alpha_n$ racionális legyen. Az utóbbi tulajdonsággal rendelkező szög végtelen sok van, hiszen végtelen sok nem hasonló pitagoraszi háromszög létezik és ezek hegyesszögei megfelelnek. E végtelen sok lehetőségből az első feltétel csak véges számút zár ki, így mindig találunk megfelelő α_n-et, s ezáltal P_{n+1}-et. Ezt minden n-re elvégezve a kívánt végtelen ponthalmazt kapjuk.

Létezik-e a síkban olyan korlátos ponthalmaz, amelynek egy alkalmas pontját elhagyva a maradék az eredetivel egybevágó lesz?

Ilyen halmaz látszólag nem létezik: ha például egy kör- vagy téglalaplemezből, vagy egy görbéből elhagyunk egy pontot, a „lyuk" látható lesz, a maradék nem lehet az eredetivel egybevágó. A válasz mégis igenlő (lásd **6. állítás**). Konstruáljuk az 5. állítás bizonyításában szereplő $P_1, \ldots, P_n, \ldots$ végtelen pontsorozatot úgy, hogy az ott szereplő α_n-eket mindig a 3, 4, 5 oldalú háromszög kisebbik hegyesszögének választjuk, jelöljük ezt pl. γ-val. (Ekkor is különbözők lesznek a P_n pontok, mert ha $P_i = P_j$ $(i<j)$ lenne, akkor $(j-i)\cdot 2\gamma$ szögelfordulás után újra P_i-be jutnánk, ami ellentmond annak, hogy γ nem racionális többszöröse π-nek.)

Jelöljük az így adódó ponthalmazt S_γ-val. Mivel P_1-et 2γ-val elforgatva P_2-t kapjuk, és általában P_n-et 2γ-val elforgatva P_{n+1}-be jutunk, így a következő állítást nyerjük:

6. állítás: *Az előzőkben konstruált S_γ ponthalmazra*

$$S_\gamma \cong S_\gamma - \{P_1\}$$

teljesül.

Ismert beugrató kérdés: *Felosztható-e egy körlemez két egybevágó, közös pont nélküli részre?*

Az első ötlet, a két félkörlemez nem jó, hiszen az átmérő pontjai mindkettőben benne lesznek. Ha az átmérőt a középponttal elfelezzük, és a részeket egy-egy fékörlemezhez csatoljuk, még baj lesz a középponttal. Éppen a középpont speciális szerepét kihasználva adhatjuk meg a választ:

7. feladat: *A fenti tulajdonságokkal bíró felosztás nem létezik.*

[Útmutatás: A két rész közül csak az egyik tartalmazná a középpontot. Az az egybevágóság, ami ezt a részt a másikba viszi, a középpontot egy tőle különböző pontba képezné. Ekkor az utóbbi ponthalmazban nem lehetne, az előbbiben viszont lenne $2r$ távolságú pontpár.]

E feladat állítása tetszőleges, középpontosan szimmetrikus, korlátos *konvex* halmazra is általánosítható. Így még meglepőbb a következő

8. feladat: *Létezik a síkban olyan, középpontosan szimmetrikus, szimmetriaközéppontját tartalmazó korlátos halmaz, amely felbontható két egybevágó, közös pont nélküli részre.*

[Útmutatás: S_γ két példányából rakhatunk össze ilyent.]

Befejezésül még egy hasonló jellegű kérdés:

9. feladat: *Létezik-e olyan korlátos ponthalmaz a síkban, amely felbomlik két, vele egybevágó, közös pont nélküli részre. (Ekkor a részek szükségképpen szintén egybevágóak egymással.)*

[Útmutatás: Használjuk a **2. állítást**!]

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Villányi út 74. IV. 23. 1113. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is! Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő haramdik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

903. Mutassuk meg, hogy az

$$x-\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-\sqrt{y}+y=0$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazában!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

904. Leírtuk az 10 100 001 000 000 000 kezdetű egymillió jegyű kettes számrendszerbeli természetes számot: a k-adik 1-es számjegy után k^2 számú 0 áll, és ezt követi a $(k+1)$-edik 1-es, ameddig a szám végére nem érünk (k pozitív egész szám). Hány 1-es jegyet írtunk le? Hányadik helyen áll az utolsó 1-es?

Zsilinszky László, Érsekújvár

905. Igazoljuk, hogy az

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad n=1,\\ 5, & \text{ha} \quad n=2,\\ 6a_{n-1}-a_{n-2}, & \text{ha} \quad n>2\end{cases}$$

sorozat bármelyik elemére $\sqrt{2a_n^2-1}$ egész szám!

Appel György, Budapest

906. Adott a háromszög egyik oldalegyenese és a másik két oldalhoz tartozó magasság talppontja. Szerkesszük meg a háromszöget!

907. A háromszög a, b $(a>b)$ oldalai, az általuk bezárt γ szög f_c szögfelezője és a γ mellékszögének f_c' szögfelezője közt fennáll az

$$\frac{f_c'}{f_c}=\frac{a+b}{a-b}\sqrt{3}$$

összefüggés. Mekkora a γ szög?

Csányi Péter, Nagykőrös

908. Az r sugarú k_1 félkör AB átmérőjére az AB k_1-et tartalmazó félsíkjában két $\frac{r}{2}$ sugarú félkört (k_2, k_3) helyezünk el az átmérőjükkel úgy, hogy érintsék egymást a k_1 középpontjában. A k_4 kör belülről érinti k_1-et és kívülről a k_2-t, k_3-at. Mekkora annak a körnek a sugara, amely k_1-et belülről, k_3-at és k_4-et pedig kívülről érinti?

Feladatmegoldások (891—896.)

891. Igazoljuk, hogy ha k egész szám, akkor

(1) $$k^{99}-k^{77}-k^{67}-k^{57}+k^{45}+k^{35}+k^{25}-k^3$$

osztható 1978-cal!

Kun Péter, Szentendre

Megoldás: Jelöljük az (1) alatti egész számot A-val. Az 1978 prímhatványtényezős felbontása: $2\cdot 23\cdot 43$. Törekedjünk arra, hogy A-nak 2-vel, 23-mal és 43-mal való oszthatóságát kimutassuk.

Az A 2-vel való oszthatósága minden átalakítás nélkül látszik, hiszen ha $2|k$, akkor $2|A$ igaz; ha pedig $2\nmid k$, akkor k mindegyik hatványa, valamint ezek ellentettje is páratlan, és nyolc páratlan szám összege páros.

A másik két prímszámmal való oszthatóság kimutatása érdekében alakítsuk A-t szorzattá:

(2) $$A=k^3(k^{96}-k^{74}-k^{64}-k^{54}+k^{42}+k^{32}+k^{22}-1)=k^3[k^{74}(k^{22}-1)-k^{42}(k^{22}-1)-k^{32}(k^{22}-1)+$$

$$+(k^{22}-1)]=k^3(k^{22}-1)(k^{74}-k^{42}-k^{32}+1)=k^3(k^{22}-1)(k^{32}-1)(k^{42}-1)=$$

$$=(k^{23}-k)(k^{33}-k)(k^{43}-k).$$

Ismeretes Fermat kongruencia-tétele („kis Fermat-tétel"), amely szerint bármely a egész számra és bármely p prímszámra $a^p\equiv a \pmod p$.

Ennek következtében igazak a $23|k^{23}-k$ és $43|k^{43}-k$ relációk minden egész k-ra.

Minthogy 2, 23 és 43 prímszámok, ezért A a szorzatukkal is osztható, és ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

A (2) alatti utolsó előtti szorzat tényezői azonban többet is elárulnak A-ról. Ha $2|k$, akkor $8|k^3$; ha $2\nmid k$, akkor a $k^{22}=(k^2)^{11}$, $k^{32}=(k^2)^{16}$, $k^{42}=(k^2)^{21}$ alakokból $k=2l+1$, $k^2=4l(l+1)+1=8q+1$ alapján következik, hogy az elsőtől eltekintve mindegyik tényező osztható 8-cal. A harmadik tényező $(k^{16}+1)(k^{16}-1)$ alakjából Fermat tétele alapján látszik, hogy minden egész k-ra A osztható 17-tel is. Mindezeket összevetve A minden egész k-ra osztható $68\cdot 1978=134\,504$-gyel.

Bartha Gábor, Szentendre

A megoldók száma: 36.

892. Mutassuk meg, hogy az

(1) $$x(x+y)(x+2y)=(x+3y)^2$$

egyenletnek végtelen sok racionális megoldása van!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

1. megoldás: Az (1)-et kielégítő számpárok a derékszögű koordináta-rendszerben valamilyen H ponthalmazt határoznak meg. A H nem üres, mert a (0; 0) számpár megoldása az (1)-nek. Vegyünk ezen a ponton át racionális meredekségű e egyenest: $y=rx$ (az egyszerűség kedvéért legyen $r>0$), és keressük e és H közös pontját. Ha találunk az origótól különböző közös pontot, akkor majd az r alkalmas változtatásával állítunk elő végtelen sok racionális megoldást.

Ha $(x;y)$ kielégíti az (1)-et és az $y=rx$ egyenletet is, akkor az x-re teljesül az

$$x^3(1+r)(1+2r)=x^2(1+3r)^2$$

egyenlet. Ha $x\neq 0$, akkor az

(2) $$x=\frac{(1+3r)^2}{(1+r)(1+2r)},\quad y=\frac{r(1+3r)^2}{(1+r)(1+2r)}$$

számpárhoz jutunk, ahol y is pozitív. Megfordítva: ha tetszőleges pozitív racionális r-rel előállítjuk a (2) alatti egyenletek segítségével az $(x;y)$ számpárt, akkor — mint a behelyettesítés mutatja — racionális megoldását kapjuk az $y=rx$-nek és az (1)-nek is.

Ha $r_1>r_2>0$, akkor a (2) alatti x értékekre az $x(r_1)>x(r_2)$ reláció érvényességét sejtjük. Ennek helyességét könnyen igazolhatjuk: a kínálkozó egyszerűsítések a vele ekvivalens

$$(r_1-r_2)(3+7(r_1+r_2)+15r_1r_2)>0$$

egyenlőtlenséghez vezetnek, amely a feltételek miatt teljesül. Ha tehát az r-et végigfuttatjuk tetszőleges, pozitív racionális számokból álló szigorúan monoton r_n sorozat elemein, akkor a (2) alatti (x_n, y_n) számpárok végtelen sok különböző racionális megoldását szolgáltatják az (1) egyenletnek, mert a számpárok első elemei mind különbözők.

II. megoldás: Tegyük fel, hogy az (1) egyenletet kielégíti olyan racionális $(x; y)$ számpár, amelyre $x \neq 0$, $x+y \neq 0$, $x+2y \neq 0$. Ebből következik, hogy $x+3y$ is 0-tól különböző, és akkor teljesül az

$$\frac{x(x+y)}{x+3y} = \frac{x+3y}{x+2y} \tag{3}$$

egyenlet is. A két tört megegyező racionális értékét jelöljük k-val. Oldjuk meg $(x; y)$-ra a (3) egyenletből felírható

$$\frac{x(x+y)}{x+3y} = k, \quad \frac{x+3y}{x+2y} = k \tag{4}$$

egyenletrendszert! A kapott megoldásból állítunk majd elő végtelen sok racionális megoldást (1)-re.

Feltéve, hogy $(x; y)$ megoldása a (4) egyenletrendszernek, a belőle származó

$$y(x-3k) = x(k-x) \qquad y(3-2k) = x(k-1)$$

egyenletek oldalait $(3-2k)$-val, illetve $(x-3k)$-val szorozva az

$$x(k-x)(3-2k) = x(k-1)(x-3k),$$

majd a

$$(2-k)x = k^2$$

egyenlethez jutunk. Fordítva: a 2-től és $\frac{3}{2}$-től különböző racionális k-val felírható

$$x = \frac{k^2}{2-k} \qquad y = \frac{k^2}{2-k} \cdot \frac{k-2}{3-2k} \tag{5}$$

racionális számpárról a behelyettesítés megmutatja, hogy kielégíti az (1)-et.

Az (5) alatti számpár elemei pozitívak, ha $1 < k < \frac{3}{2}$ igaz, továbbá az $1 < k_2 < k_1 < \frac{3}{2}$ hármas egyenlőtlenséget kielégítő k_1, k_2-re látszik

$$\frac{k_2^2}{2-k_2} < \frac{k_1^2}{2-k_1}$$

teljesülése. Ha tehát k végigfut tetszőleges, 1 és $\frac{3}{2}$ közti racionális számokból álló szigorúan monoton k_n sorozat elemein, akkor az (5) alatti egyenletek végtelen sok különböző racionális megoldást határoznak meg.

A megoldók száma: 26.

893. Határozzuk meg azokat a valós számokat, amelyekre az $\frac{a+2}{a^2+1}$ tört értéke természetes szám!

Zsilinszky László, Érsekújvár

Megoldás: Tegyük fel, hogy az a valós és a t természetes számra teljesül az

$$\frac{a+2}{a^2+1} = t \tag{1}$$

egyenlet, akkor ebből következik a

$$ta^2 - a + t - 2 = 0$$

egyenlet fennállása is. Ha $t=0$, akkor $a=-2$ adódik, ha pedig $t\neq 0$, akkor az egyenlet a-ban másodfokú, és az

$$a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{-4t^2+8t+1}}{2t}$$

értékeket adja. Mivel feltevésünk szerint a valós, ezért teljesül a

$$-4t^2+8t+1\geqq 0 \tag{2}$$

egyenlőtlenség. A (2) igazsághalmaza a valós számok halmazában az $\left[1-\frac{\sqrt{5}}{2};\ 1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ zárt intervallum. Ebben csak három természetes szám van: 0, 1 és 2. A $t=0$ esetet már megtaláltuk, a $t=1$-re az (1) megoldásai $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $t=2$-re pedig 0 és $\frac{1}{2}$.

Tehát a szóba jöhető a és t értékek:

(3)

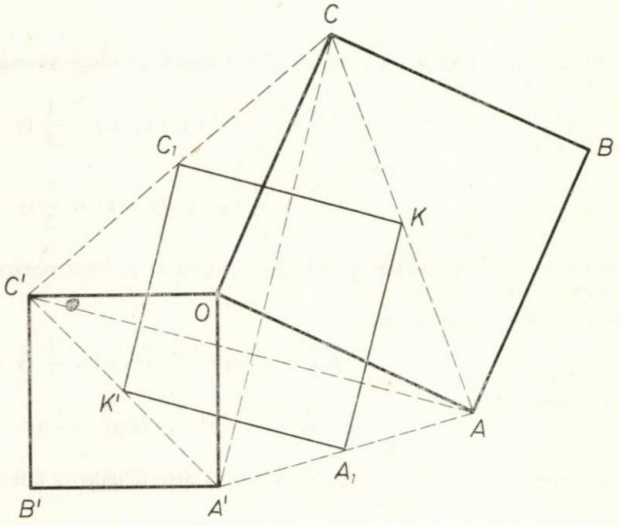
a	-2	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
t	0	1	1	2	2

Közvetlen behelyettesítés mutatja, hogy mind az öt számpár kielégíti az (1) egyenletet, tehát a keresett a értékek a (3) alattiak.

A megoldók száma: 50.

894. Vegyük fel a síkban az $OABC$ és az $OA'B'C'$ négyzeteket úgy, hogy ellentétes körüljárásúak legyenek! Mutassuk meg, hogy a négyzetek középpontjai, továbbá az AA' és a CC' szakaszok felezőpontjai egy négyzet csúcsai!

I. megoldás: Az 1. ábrán a K középpontú $OABC$ négyzetet pozitív, a K' középpontú $OA'B'C'$ négyzetet pedig negatív körüljárásúnak ábrázoltuk, a másik lehetőség tengelyes tükrözéssel visszavezethető erre. Az AA', CC' — esetleg elfajuló — szakaszok felezőpontja legyen A_1, illetve C_1. Kínálkozik az AC és az $A'C'$ négyzetátló meghúzása. Ekkor az $AA'C'C$ „négyszög"-höz jutunk, amelynek „négy" oldalfelező pontja a vizsgált „négy" pont. Azért nem beszélhetünk nyugodtan csak négyszögről, mert könnyen keletkezhet hurkolt négyszög is, sőt elfajulás is bekövetkezhet, és ezeket megállapodás szerint nem számítjuk a négyszögek közé, mert a négyszög szót az egyszerű négyszögvonal (vagy az egyszerű négyszögtartomány) helyett használjuk.

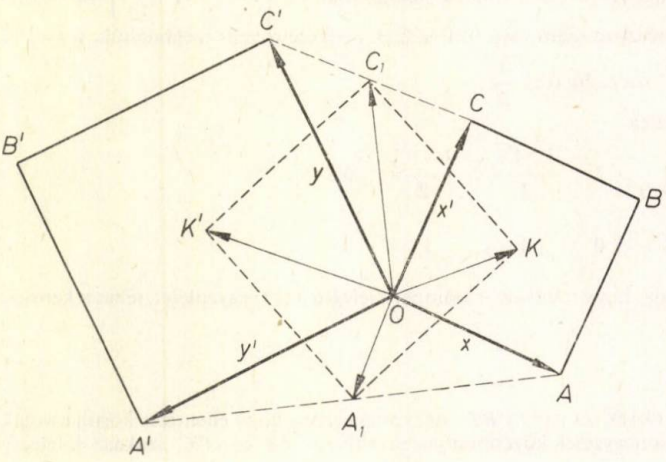


1. ábra

Egyszerű négyszögekre ismeretes, hogy az oldalfelező pontok paralelogramma csúcsai. Hurkolt négyszögekre ez már csak akkor érvényes, ha hozzátesszük, hogy a paralelogramma el is fajulhat. Elfajuló négyszögek oldalfelező pontjai pedig esetleg elfajuló paralelogramma csúcsai. E tételekre hivatkozva biztos, hogy az A_1, K', C_1, K pontok — esetleg elfajuló — paralelogramma csúcsai. A továbbiakban egyszerűség kedvéért az elfajulásokra nem mindig teszünk célzást.

A C_1K' szakasz fele a CA'-nak, a C_1K pedig a $C'A$-nak. Vizsgáljuk a CA' és a $C'A$ szakaszokat. Mindkettőhöz keressünk egy-egy háromszöget. Jó lenne, ha ezek megmutatnák, hogy a CA' és $C'A$ szakaszok egyenlők és merőlegesek egymásra, mert akkor már biztos volna, hogy az $A_1K'C_1K$ — esetleg elfajuló — paralelogramma — esetleg elfajuló — négyzet.

Az OCA' és az OAC' — esetleg elfajuló — háromszögekre érvényes, hogy az OA-nak $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottja az OC, az OC'-nek pedig az OA' szakasz, tehát az $OAC'\Delta$-nek $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottja az $OCA'\Delta$. Ezzel kimutattuk a CA' és $C'A$ szakaszok egyenlőségét és merőlegességét. Tehát igazoltuk a feladat állítását, azzal a módosítással, hogy az $A_1K'C_1K$ négyzet esetleg elfajuló.



2. ábra

II. megoldás: Vezessünk vektorokat 0-ból az A, C, C', A' csúcsokba a 2. ábra szerint (egy $\mathbf{v}$ vektor $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottját $\mathbf{v}'$-vel jelöljük). E négy vektorrral (amelyek közt egyenlők is lehetnek) a K, C_1, K' és A_1 pont helyvektora rendre így áll elő:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \quad \frac{1}{2}(\mathbf{x}'+\mathbf{y}),$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{y}+\mathbf{y}'), \quad \frac{1}{2}(\mathbf{y}'+\mathbf{x}).$$

Nézzük meg a $KC_1K'A_1$ „négyszög" két szemközti oldalvektorát:

$$\overrightarrow{KC_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}'+\mathbf{y}-\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x}),$$

$$\overrightarrow{A_1K'} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}+\mathbf{y}'-\mathbf{y}'-\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

Két szemközti oldalvektor egyenlő, ennélfogva az említett pontok paralelogramma csúcsai, amely azonban elfajuló is lehet.

Nézzük a $\overrightarrow{KA_1}$ oldalvektort:

$$\overrightarrow{KA_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}'+\mathbf{x}-\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{2}(\mathbf{y}'-\mathbf{x}').$$

Használjuk fel, hogy

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})' = \mathbf{a}'+\mathbf{b}', \quad \text{és hogy} \quad (-\mathbf{a})' = -\mathbf{a}',$$

akkor látszik, hogy $\overrightarrow{KC_1} = \overrightarrow{KA_1}$, tehát a négy nem feltétlenül különböző pont valóban négyzet négy csúcsa, de a négyzet elfajuló is lehet.

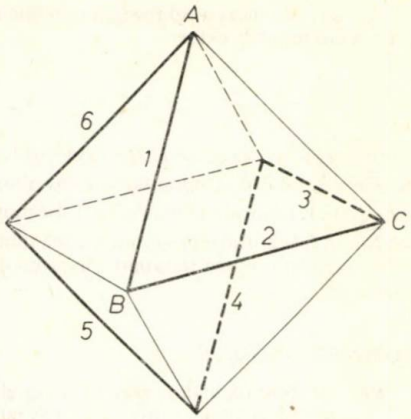
A megoldók száma: 41.

895. Adott egy szabályos oktaéder. A csúcsait kössük össze hat oktaéderéllel úgy, hogy olyan térbeli hatszög keletkezzék ($ABCDEF$), amelynek négy csúcsánál a befutó élek 60°-os szöget zárjanak be, két csúcsánál pedig derékszöget. Tükrözzük a tér tetszőleges pontját A-ra, a tükörképet B-re, az így kapott tükörképet C-re, s í. t., az utolsó tükörközéppont F legyen. Mivel lehet helyettesíteni a hat egymás utáni tükrözést?

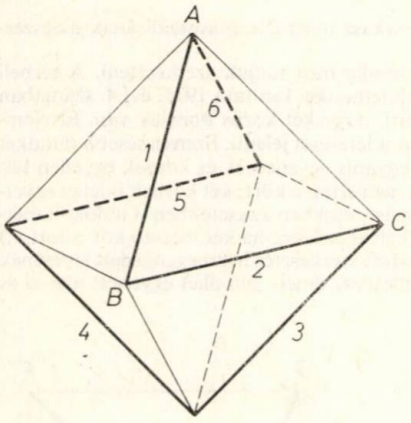
Vigassy Lajos, Budapest

Megoldás: Az oktaéder tetszőlegesen választott A csúcsát kössük össze az egyik szomszédos B csúccsal. A B-ből lényegében két továbbhaladási lehetőség van: vagy nem az A-val átellenes csúcsba (itt lényegében mindegy, hogy a kettő közül melyiket nézzük, mert a másik minden úthoz egy szimmetriasíkra tükrös útvonalat szolgáltat), vagy pedig abba. Az első esetben a harmadik érintett csúcsból (C-ből) két úton mehetünk tovább az éleken úgy, hogy minden csúcsot érintve a feltételeknek megfelelően visszajussunk az A csúcsba (3. és 4. ábra). A második esetben csak egyetlen útvonal létezik (5. ábra). Nem nehéz belátni, hogy a nyert három térbeli hatszög egybevágó.

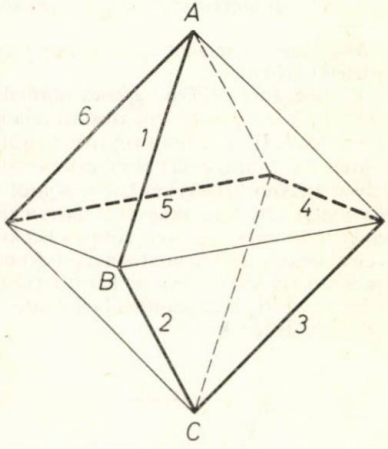
Az X pontra vonatkozó tükrözést jelöljük T_X-szel. Azt az ismert tényt, hogy az X, majd az Y pontra vonatkozó tükrözés szorzata a $2\cdot\overrightarrow{XY}$ vektorral való eltolás, jelöljük így: $T_X \cdot T_Y = E_{2\cdot\overrightarrow{XY}}$. Felhasználjuk azt az ismert tételt is, hogy egybevágósági transzformációk szorzata asszociatív, valamint azt, hogy eltolások szorzata eltolás.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Hogy a feladat kérdésére választ adhassunk, próbálkozzunk a következő zárójelezéssel:

$$G = T_A T_B T_C T_D T_E T_F = (T_A T_B)\cdot(T_C T_D)\cdot(T_E T_F).$$

Az előbb említett tétel értelmében érvényes, hogy

$$G = E_{2\cdot\overrightarrow{AB}} \cdot E_{2\cdot\overrightarrow{CD}} \cdot E_{2\cdot\overrightarrow{EF}}.$$

Vizsgáljuk mindhárom esetben a vektorok összegeződését.

A 3. ábrán:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF},$$

ezért $G = E_{2\cdot\overrightarrow{CF}}$;

a 4. ábrán:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$

ezért

$$G = E_{2\cdot\overrightarrow{AD}};$$

az 5. ábrán:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB},$$

ezért

$$G=E_{2\cdot\overrightarrow{EB}}.$$

Azt kaptuk, hogy a tükrözések szorzata mindig eltolás, amelynek vektora a két derékszögű csúcsot összekötő testátlóvektor.

Bartha Gábor, Szentendre; Bogdán Zoltán, Cegléd; Kacsó Ferenc, Marosvásárhely; Kamarás Lajos, Pécs; Szánthó Gyula, Gyula és dr. Szikszai József, Miskolc

Megjegyzés: Az eredő eltolásvektorokban még a következő szabályosságot lehet felfedezni:
a $\overrightarrow{CF}$ a 3. tükörközéppontból a 6.-ba mutat,
az $\overrightarrow{AD}$ az 1. tükörközéppontból a 4.-be mutat,
az $\overrightarrow{EB}$ az 5. tükörközéppontból a 2.-ba mutat,
tehát minden esetben páratlan sorszámú csúcsból a ciklikusan harmadikként következő páros sorszámúba.

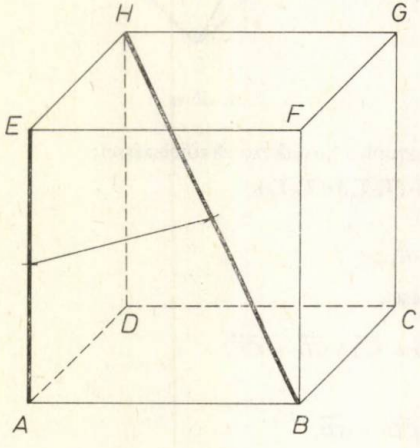
Katz Sándor, Bonyhád

A megoldók száma: 18.

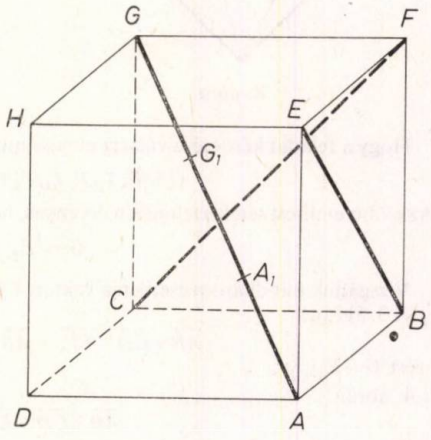
896. *a)* Adott kockán válasszunk egy élt és egy hozzá kitérő testátlót,
b) adott kockán válasszunk egy lapátlót és egy hozzá kitérő testátlót,
c) adott kocka két szomszédos lapján válasszunk egy-egy kitérő lapátlót,
d) adott szabályos oktaéderen válasszunk két kitérő élt,
és szerkesszük meg a normáltranszverzálisukat!

Megoldás: A feladat mind a négy esetben két kitérő szakasz normáltranszverzálisának megszerkesztését igényli.

Két megadott kitérő egyenes normáltranszverzálisát mindig meg tudjuk szerkeszteni. A térbeli eukleidészi szerkesztés szokásos definícióját közöltük A Matematika Tanítása 1976. évi 4. számában (126. oldal). Itt a 7. pont egyenes és kör metszését úgy érti, hogy két közös pontjuk van. Értelemszerűen a 6. pontban két kör metszése szintén két közös pont létezését jelenti. Szerencsésebb mindkét helyen metszés helyett két közös pontot mondani. Lehet ugyanis egyenesnek és körnek egyetlen közös pontja úgy, hogy az egyenes nincs a kör síkjában, tehát nem érinti a kört; két körnek is lehet egyetlen közös pontja úgy, hogy ebben a két kör nem érinti egymást: ezekben az esetekben is indokolt metszésről beszélni. (A 6. pontban az első névelő sajtóhiba, a helyes szöveg; ha két metsző kör adott,...) Ha adott két kitérő egyenes két-két pontjával, akkor a térbeli szerkesztés hét megengedett lépésének véges sokszori alkalmazásával eljuthatunk ahhoz az egyeneshez, amely mindkét egyenest metszi és merőleges is rájuk.



6. ábra



7. ábra

Két kitérő szakaszhoz azonban nincs mindig olyan egyenes, amely egy-egy pontjukat köti össze és mindkettőre merőleges. A kitűzött feladat tehát azt kéri, hogy mind a négy esetben mutassuk meg ilyen egyenes létezését, és — miután speciális, poliéderhez kötött kitérő szakaszpárról van szó — keressünk minél egyszerűbb speciális szerkesztési eljárást az előállítására.

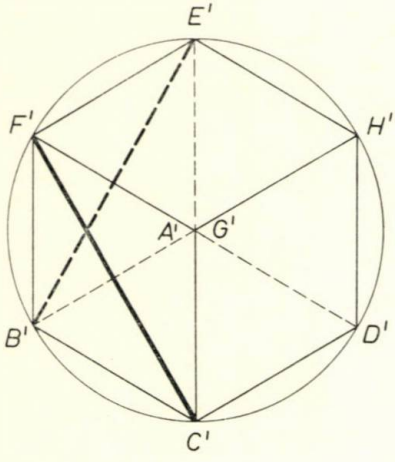
a) A kockán kiválasztott AE élt (6. ábra) toljuk el a DH élbe, ekkor az AE él tetszőleges pontjából a BDH síkra bocsátott merőleges már megadja a normáltranszverzális állását. Ha ezt a merőlegest az A csúcsból húzzuk, akkor éppen az AC egyenest kapjuk, és ha ezt végigtoljuk az AE egyenesen, akkor a BD és HF szakaszokat felező egyenes a BH-t a felezőpontjában metszi. Ezzel a normáltranszverzális egyenesnek az egyik kitérő egyenesen levő pontját megkaptuk, a másik kitérő egyenesen levő pontja most már nyilvánvalóan az AE él felezőpontja.

b) Itt (7. ábra) az előzőhöz hasonló eltolás már a kockán kívülre visz. Hogy könnyebben tájékozódhassunk, nézzük a kockát az egyik kitérő egyenes irányából. Elsősorban a testátló kínálkozik erre a célra. Helyezzük az A csúcsot az első képsíkra, és AG legyen merőleges rá. Mindegyik él ugyanakkora szöget zár be a testátlóval, és emiatt az első képsíkkal is. Ennélfogva mindegyik élnek a testátlón levő vetülete egyenlő, illetve mindegyik él első képe ugyanakkora. Az A-ból kiinduló három él végpontjának első képe, továbbá a G-ből induló élek végpontjáé egy körön van, amelynek sugara a hat közbülső csúcs távolsága a testátlótól. Az $AEHG$ töröttvonal első képe az eddigiek alapján szabályos háromszög. Tehát a kocka első képe szabályos hatszög (8. ábra), és az „első emeleti" BDE, valamint a „második emeleti" CFH szabályos háromszög valódi nagyságban látszik. Ezek középpontja az A_1, illetve G_1 harmadolópont. (Az első képre támaszkodva a második képet is könnyen megszerkeszthetjük.)

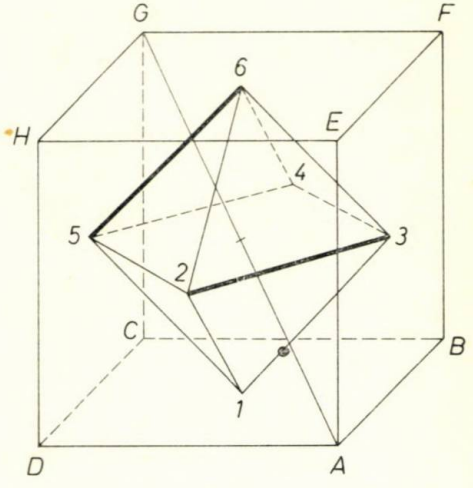
A 8. ábrán jól látszik, hogy az AG-t metsző rá merőleges egyenesek közül a BE-re is merőleges egyenesek a BE szakasz felezőmerőleges síkján vannak, tehát a keresett normáltranszverzális a BE felezőpontját az AGA_1 harmadoló pontjával összekötő egyenes.

c) A 7. ábrán BE és CF szomszédos lapokon levő két kitérő lapátló. A BE első emeleti, a CF második emeleti szakasz (8. ábra), ezért a normáltranszverzális állása az AG testátló, és maga a normáltranszverzális a $B'E'$ és $C'F'$ metszéspontján át az AG-vel párhuzamosan húzott egyenes. Az első képről könnyen le lehet olvasni, hogy a $B'E'$ és $C'F'$ metszéspontja mindkét képszakasznak harmadoló pontja, ebből következően viszont maguknak a BE és CF szakaszoknak normáltranszverzálisa a B-hez, illetve F-hez közelebbi harmadoló pontjukat összekötő egyenes (a BF az az él, amelynek végpontjaiból indul ki a vizsgált két lapátló).

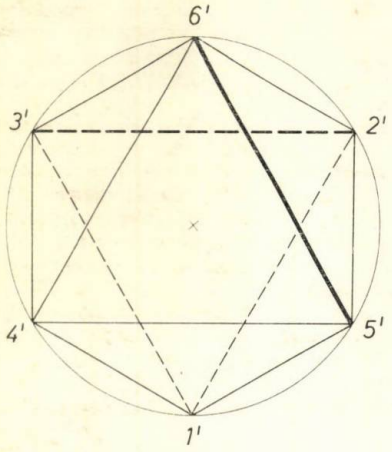
d) A szabályos oktaéderhez mindig van olyan kocka, amelynek lapközéppontjai az oktaéder csúcsai (9. ábra). A kiválasztott élek a 23 és az 56. Az 123 lap a második emeleti (5. ábra) CHF szabályos háromszögnek 1/2 arányú centrális hasonlósággal nyert képe, ha A a centrum. Ugyanezt mondhatjuk el G centrummal a 456 lapról és a BDE első emeleti szabályos háromszögről. Ebből következik, hogy az 123 456 szabályos oktaédernek a vetülete a kocka 4. ábra szerinti elhelyezése esetén szabályos hatszög, amelynek csúcsai az $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $A'H'$, $A'E'$, $A'F'$ szakaszok felezőpontjai (10. ábra).



8. ábra



9. ábra



10. ábra

Minthogy a 23 első emeleti, az 56 pedig második emeleti szakasz volt a kockán, ezért a 2'3' és 5'6' szakaszok metszéspontjában a képsíkra állított merőleges a normáltranszverzális állása, és a képről le lehet olvasni, hogy maga a normáltranszverzális a 23 és az 56 szakasznak a 2-höz, illetve 6-hoz közelebbi harmadoló pontját összekötő egyenes (a 26 élnek a végpontjaiból indul ki a két kiválasztott él).

Mind a négy esetben megszerkesztettük a normáltranszverzális szakaszt is.

Megadták a legegyszerűbb megoldást:
Bartha Gábor, Gaál László, Horváth Géza, Ihász László, Imolya Sándor, Kacsó Ferenc, Kondor Judit, Németh László (Zalaegerszeg) és Vigassy Lajos.

A megoldók száma: 19.

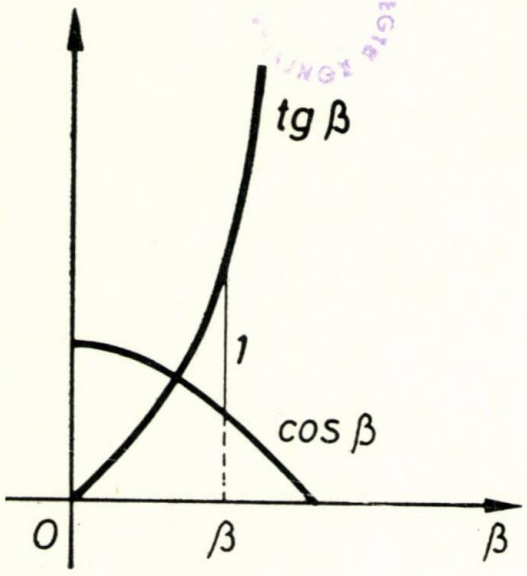
A megoldók névsora (891—896.)

Almádi Jánosné, Bp. (893.); dr. Bakács Istvánné, Bp. (894.); Bartha Gábor, Szentendre (891., 892. két mód, 893—896.); Bencze Mihály, Brassó (891—893.); Bogdán Zoltán, Cegléd (891., 892. két mód, 893—896.); Csányi Péter, Nagykőrös (893., 894.); Csorba Ferenc, Győr (891—895.); Deák Imre, Székelyudvarhely (892—894.); Fehér József, Csongrád (891—896.); Gaál László, Sepsiszentgyörgy (891—896.); Gáll Éva, Bp. (894—896.); Görbe László, Kecskemét (891., 893.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Bp. (891., 893., 894.); Hazag Tibor,Bp. (891., 893.); Hoffer János, Bp. (891., 893., 894.); Hortobágyi János, Gyulaj, (891., 893., 894.); Horváth Géza, Zseliz (893., 896.); Ihász László, Nagybajom (891—896.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (891., 892., 893. két mód, 894—896.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (891—893., 895., 896.); Kallós Károly, Győr (893., 894., 896.); Kamarás Lajos, Pécs (891—893., 894. két mód, 895. két mód, 896.); Katz Sándor, Bonyhád (891., 893—896.); Kelemen Lajos, Kisvárda (892—895.); Kiss Andrea, Szombathely (893., 894.); Kondor Judit, Bp. (891., 893., 894. két mód, 896.); Kotek Lászlóné, Pécs (891., 893., 894.); Kovács Zoltán, Szádalmás (891—893.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Érd (893., 894.); Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (891., 893., 894.); Kulcsár Károlyné, Szücsi (894.); Kun Péter, Szentendre (891., 894., 896.); Németh László, Vasvár (892—894. 896.); Németh László, Zalaegerszeg (893. két mód, 894. két mód, 895., 896.,); Nyirő László, Mezőkövesd (891—894.); Olosz Ferenc, Szatmár (892—894.); Petényi Flórián, Pozsony (893.); Polcz Katalin, Pécs (891—894.); Schutzbach Mártonné, Siófok (891., 893.); Sebestyén László, Bp. (891., 893.); Simon Béla, Nyíregyháza (893., 894.); Szabó Jánosné, Békéscsaba (891—894.); Szánthó Gyula, Gyula (891—896.); dr. Szikszai József, Miskolc (891—893., 895., 896.); Szilágyi István, Esztergom (892—894.); Szlízs Róbert, Galánta (891—895.); Takács Dezső, Egyházaskozár (893.); Téglás Zsuzsanna, Kalocsa (893., 894.); Terhesné Dudás Rozália, Pitvaros (891., 893., 894.); Timár Éva, Békéscsaba (891—894.); Tóth Ferenc, Szeged (891., 893., 894.); Tóth János, Érsekújvár (891.); Ungvári Jánosné, Debrecen (891—895.); Vigassy Lajos, Bp. (894—896.); Wekszli Árpád, Csorna (891—893.); Zsidó György, Kolozsvár (891—893.).

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1979. Október * XXVI. évfolyam 5 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200.
79-3922 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodában (KHI, 1051 Budapest, József nádor tér 1., telefon: 180-850, postacím: *1900 Budapest*) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők a 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Karádi Károlyné: A szakfelügyelet szerepe a nevelő-oktató-képző munka permanens fejlesztésében, a tanítási-tanulási folyamat korszerűsítésében. II. rész 129
Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (kísérleti anyag). I. osztály, 1. rész.. 139
Békefi Zsuzsanna: Megjegyzések az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny II. fordulóján írt dolgozatokhoz 149
Hódi Endre: Egy hozzászólás 154
Mit ír a Kvant a zsebszámológépek iskolai használatáról? 158
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus Vándorgyűlés Nyíregyházán 159
Közlemény a 4. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról 160

СОДЕРЖАНИЕ

Каради Каройнэ: Роль инспекторства в перманентом развивании воспитательно-поучительно-подготовительной работы и в модернизации учительного-изучительного процесса, часть II. 129
Коллер Ласлонэ: Система требований по математических программах профессиональных школ (экспериментальный текст). Класс I, часть I. 139
Бекефи Жужанна: Примечания к работам писанным на втором туре Всевенгерского Среднешкольного Учебного Соревнования 149
Ходи Эндре: Высказывание..... 154
Что пишет журнал Квант о школьном употреблении миникалькуляторов? .. 158
Д-р. Шарницки Виктор: Выездная сессия математиков в Ниредьхазе 159
Сообщение о Четвертом Международном Конгрессе по Преподавании Математики 160

INHALT

Frau Magdolna Karádi (geb.: *Holl*): Die Rolle der Fachaufsicht in der permanenten Entwicklung der erziehenden, unterrichtenden und ausbildenden Arbeit, in der Modernisierung des Lehr-Lern-Prozesses. II. Teil 129
Frau Marianne Koller (geb.: *Sátori*): Ein Anforderungssystem aus der Mathematik für die Berufsschulen (Versuchsmaterial). I. Klasse, 1. Teil 139
Békefi, Zsuzsanna: Bemerkungen zu den Klausurarbeiten, die in der zweiten Runde des Nationalen Mathematik-Wettbewerbes geschrieben wurden 149
Hódi, Endre: Ein Diskussionsbeitrag 154
Was schreibt der Kvant über die Anwendung der Taschenrechner in der Schule?. 158
Dr. Scharnitzky, Viktor: Wanderversammlung der Mathematiklehrer in Nyíregyháza 159
Mitteilung über den 4-ten Internationalen Kongreß des Mathematikunterrichts.... 160

KARÁDI KÁROLYNÉ
szakfelügyelő
Budapest

A szakfelügyelet szerepe a nevelő-oktató-képző munka permanens fejlesztésében, a tanítási-tanulási folyamat korszerűsítésében.
II. rész

Melyek a leggyakoribb problémák?

Az órák megtervezése — a komplex felépítés újszerűségénél fogva — egyeseknek komoly fejtörést jelent. — Általában nem könnyű egy órára a különböző témákat összehangolni, a feladatokat úgy válogatni, hogy valami kapcsolat legyen közöttük, a feldolgozandó új anyaghoz is kapcsolódjanak, változatosak is legyenek, érdekesek is legyenek és a kitűzött célnak megfelelő fejlesztő hatással is rendelkezzenek.

A tervezés során érvényesül az egyén ötletgazdagsága, fantáziája, és e tekintetben igen különbözők vagyunk. Vannak pedagógusok (sajnos, nem ez a jellemző), akik könnyen, ötletesen tudják óráikat megtervezni, mások viszont órákat töltenek töprengéssel és még sincsenek megelégedve munkájukkal. — Ezeket a pedagógusokat feltétlenül segítenünk kell, mert a leglelkiismeretesebb ember is egyszer csak belefárad a túlfeszített munkába — ha az huzamosabb ideig tart — és közömbössé válik.

Hogyan segíthetünk? — Ötleteket adunk, ötleteket továbbítunk, „hírvivő"-ként terjesztjük azokat az eredményes eljárásokat, amelyeket az ügyesebb pedagógusoknál látunk és amelyek a mi közreműködésünk nélkül esetleg soha nem válnának közkinccsé.

Az óra tartalmi tervezése mellett nagy gondot szokott okozni *az alkalmazandó eszközrendszer* rendeltetésszerű *megtervezése,* az órai *munka megszervezése,* az egyes rendelkezésre álló eszközök célszerű használata, az eszközök kiegészítése, ... E vonatkozásban komoly feladat hárul ránk. Ha lelkiismeretesen végezzük munkánkat, akkor e téren a permanens fejlesztés bonyolult kölcsönhatás-rendszere alakul ki, amely lassan lecsiszolja a káros kinövéseket és kifejleszti a legcélszerűbb, legjobban alkalmazható eljárásokat.

Mit jelent a „kölcsönhatás-rendszer?" — Példával igyekszem megmutatni, hogy a mindennapi gyakorlat során hogyan alakul ki ez az újszerűen hangzó fogalom.

A folyamat a továbbképző intézetekben indul meg. Itt pedagógus és szakfelügyelő sokszor együtt ül az iskolapadban és hallgatja az előadást, figyeli a bemutató foglalkozásokat (hiszen e tekintetben a szakfelügyelő is kezdő!). Azután ki-ki megy a maga útjára, végzi a munkáját annak alapján, amit magáévá tett a hallottakból, látottakból, természetesen *saját tudatában, átformálva* azokat.

Egy idő után a szakfelügyelő elindul órát látogatni. A jó órából ő is tanul, elviszi az ötletet részint saját órájára, részint más iskolákba. — Ha problémával találkozik, nem biztos, hogy azonnal látja az okokat is. — Ekkor kezdődik a *töprengés,* esetleg saját óráján kipróbál hasonló szituációkat, melyeknek során rendszerint felszínre kerül az ok, adódik

a megoldás és nem egy esetben új, előremutató ötletek is támadnak. Ezeket kipróbálás után a szakfelügyelő terjesztheti saját munkaterületén és segíti vele a pedagógusok munkáját. — E kölcsönhatás-rendszer lényegét tehát röviden úgy fogalmazhatnám meg, hogy manapság *mindenki mindenkitől tanul, miközben csiszolódnak, alakulnak a módszerek.*

Az eszközök használatáról *továbbképzési kiadvány* van minden pedagógus kezében (vagy legalábbis minden iskola könyvtárában). Azonban ez a kiadvány is *csak a megindításhoz elég.* Ebből megtudhatjuk, hogy mi mire való, de a pontos „hogyan?" — vagyis a munkaszervezés menete —, és a „meddig?" (milyen szintig?) kérdésre nem kapunk választ. — A valóság az, hogy a kiadvány — szűkszavúságánál fogva — csak azok kezében kamatozik, akik egyébként is „élvonalbeliek". A középszerű vagy gyenge pedagógus elképesztően ügyetlen tud lenni az eszközhasználatban (vagy ötletszegény), csak az eszköz jelenti számára a „korszerűséget", kezében az eszközök játékká silányulnak, és amikor a munkamenet tudatos, gondos szervezése híján „anarchia" keletkezik óráján, akkor *a tantervet hibáztatja.* — Ilyen esetekben sürgős a segítség!

Mikor először eszméltem ezekre a valós problémákra, megkíséreltem illetékesekhez fordulni, javaslatot tettem egy újabb „mankó"-szerű kiadvány közreadására, amelynek címe pl. „Műhelytitkok" lehetett volna. Úgy gondoltam, hogy praktikus tanácsokat elsősorban azoktól várhatunk (saját magam is vártam a tanácsokat), akik a módszert megtervezték, kikísérletezték. — Azonban ebből nem lett semmi. — Még egy utolsó erőfeszítéssel a Bolyai János Matematikai Társulat évenként megrendezésre kerülő vándorgyűlésére javasoltam egy „Ötlettár" (vagy „Ötletbörze") létesítését, amely még azt a célt is szolgálhatta volna, hogy az országban egymástól elszigetelten fáradozó sok-sok értékes, értelmes pedagógus ötletei közkinccsé válhattak volna. Ez nagy dolog lett volna (még mindig nincs későn!), hiszen nem kellett volna mindenkinek mindent egyedül elölről kezdenie. Megoszlottak volna a feladatok, és ezzel megsokszorozhattuk volna az energiákat. — Sajnos — egy-két ember „elnéző mosolyán" kívül — nem kaptunk megnyugtató megoldást.

Tudomásul vettem, hogy magunkra maradtunk.

Ezek a problémák — úgy tűnik — csupán részletkérdések, nem igényelnek átfogóbb, központilag irányított megoldást.

Egyedül kellett hozzáfognunk — kinek-kinek saját területén — a ránk bízott pedagógusok gyámolításához.

Következzék most néhány példa saját munkaterületemről!

Bonyodalmak a lyukas tábla körül

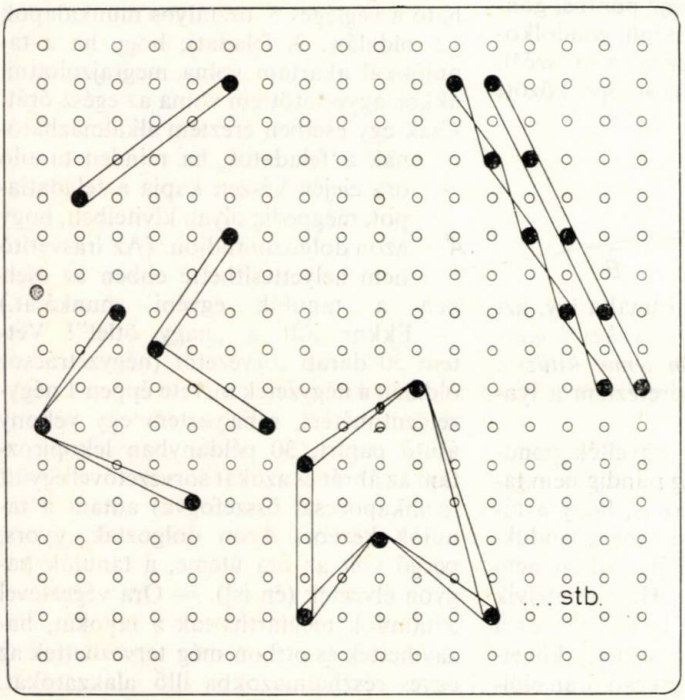
A három alapvető eszköz közül a lyukas tábla okozott nekem a legtöbb gondot:

— Sok helyen rosszul szervezik a kiosztását, összeszedését.
— Tárolása igen sok iskolában nem megoldott.
— A fővárosban használatos lyukas tábla minősége nem kielégítő: vetemedik, a hurkapálcika (amely nem egyenletesen vastag) beletörik vagy lötyög a lyukban — ilyenkor pattan a gumi feszítésére.
— A hurkapálcákat — ha nagy nehezen befeszítették a tanulók — nehezen lehet kihúzni, és valóságos géppuskaropogás kíséri ezt a tevékenységet, ahogyan a táblák egy-egy pálca kihúzásakor a padhoz csapódnak.
— A befőttesgumi méretei nem elég változatosak, minősége selejtes.
— A továbbképzési kiadvány kalapgumi beszerzését javasolja, de a valóság az, hogy mind a beszerzés, mind a selejtes tartozékok pótlása a pedagógust terheli. Ha azt akarom, hogy az órámon dolgozni tudjak, annak egyetlen biztosítéka, ha magam

veszek meg mindent. — (Kérdés: lehet-e erre kötelezni a pedagógust?) Ezek tények, de senkit nem jogosíthatnak fel arra, hogy miattuk a tantervi koncepciót és annak tartalmát marasztalja el. Az eszköz ugyanis nem azonos a tantervvel. — Ilyen esetekben nekünk kell a védelmet biztosítani meggyőzéssel, vagy helyes eljárások javasolásával.

Ha az elmondott fogyatékosságok még párosulnak hiányos munkaszervezéssel, akkor egy-egy órán teljes zűrzavar alakulhat ki. — Egy 5. osztályban láttam: a pálcák kihúzogatása közben már a következő feladatot mondta a pedagógus, amelyhez a színes rudakra volt szükség. Talán fölösleges ecsetelnem, hogy pillanatok alatt milyen vásári hangulat keletkezett. A táblák csattogtak, a fülem mellett süvített el egy hurkapálca (a tanuló nem tehetett róla, csupán ügyetlen volt), a színes rudak doboza előkerült, megindult a lázas kotorászás, közben a pedagógus rendíthetetlenül ismertette a feladatot, amit az elmondottak miatt nem sokan hallottak. — Az elemzés során szintén a tanterv volt a vétkes. Az igazgatóval jó egyetértésben védelmünkbe vettük a tantervet. Rá kellett mutatnunk arra, hogy az eszköz — mint a neve is mutatja — nem öncélú játékszer, hanem a konkrét fogalmak kialakításának időszakában a kitűzött célok elérését segíti.

Tárgyilagosan meg kell állapítanom azt is, hogy sokan vannak, akik jól alkalmazzák az eszközöket, a lyukas táblát (olyanok már inkább akadnak, akik — ha nincs látogató — elő sem veszik az eszközöket), akiktől mi is elleshetünk műhelytitkokat. Mégis nagyon elgondolkodtató volt számomra az eset. Hetekig foglalkoztatott a kérdés: „Vajon a tanterv kimunkálói valóban ezt a szerepet szánták a lyukas táblának?" Meddig célszerű használni és hogyan? Milyen célokra kívánatos a feltétlen használata, és mely esetekben lehet kiiktatni, helyettesíteni mással? E gondokat súlyosbította — a lyukas táblával kapcsolatban — néhány tartalmi vonatkozású negatív tapasztalat is:



— „Egyenes" kitűzése nem lehetséges, mert két pálcika mindig a végpontokat fogja jelenteni;
— szakasz kitűzése befőttesgumival (legtöbben így alkalmazzák) tulajdonképpen párhuzamosokat jelent;
— több csúcsponttal rendelkező konkáv sokszög kitűzése már a gumi csavargatását igényli, amihez sok tanulónak nincs megfelelő kézügyessége.

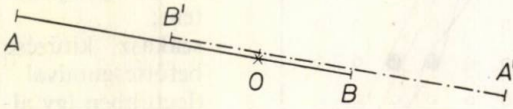
Nem szólva arról,

hogy néha egészen tetszetős csavart „vonalak" keletkeznek;
— szög kitűzése bonyodalmas, és a szög csúcsa (sokszögek csúcsaira is vonatkozik) mindig lekerekített lesz; ...

Ezek a problémák — ha túlságosan sokáig használjuk a lyukas (szöges) táblát, illetve állandósítjuk használatát — hibás beidegződéseket eredményezhetnek, leginkább a gyenge tanulóknál, de nem egy esetben a jobbaknál is. Ilyen esetekkel több helyen találkoztam. Csak két példát írok le a sok közül:

7. osztályos órán történt, amikor a tanulók olyan, adott koordinátájú pontokat tűztek ki, amelyek egy egyenesre illeszkedtek. Kifeszítették a gumit (egyesek még meg is csavargatták), majd következett a megfigyelési feladat. Egy tanuló észrevétele: „A keletkezett ponthalmaz két pont által határolt egyenes!"...

Más esetben saját 7. osztályos tanítványom munkája döbbentett meg. — Felmérő feladat volt egy *AB* szakasz középpontos tükörképének megszerkesztése. A tükrözés középpontja a szakasz egyik pontja volt. — A rajz pontos, gondos, rendes volt (jó képességű, gondolkodó, szorgalmas fiúgyerekről van szó!), de az *AB* szakasz és tükörképe között 1 mm távolság volt.



Kérdésemre, hogy miért csinálta így, azt a választ kaptam, hogy *érzékeltetni akarta, mintha lyukas táblán lenne kitűzve.* (Lehet, hogy én is túlméreteztem a lyukas tábla alkalmazását?)

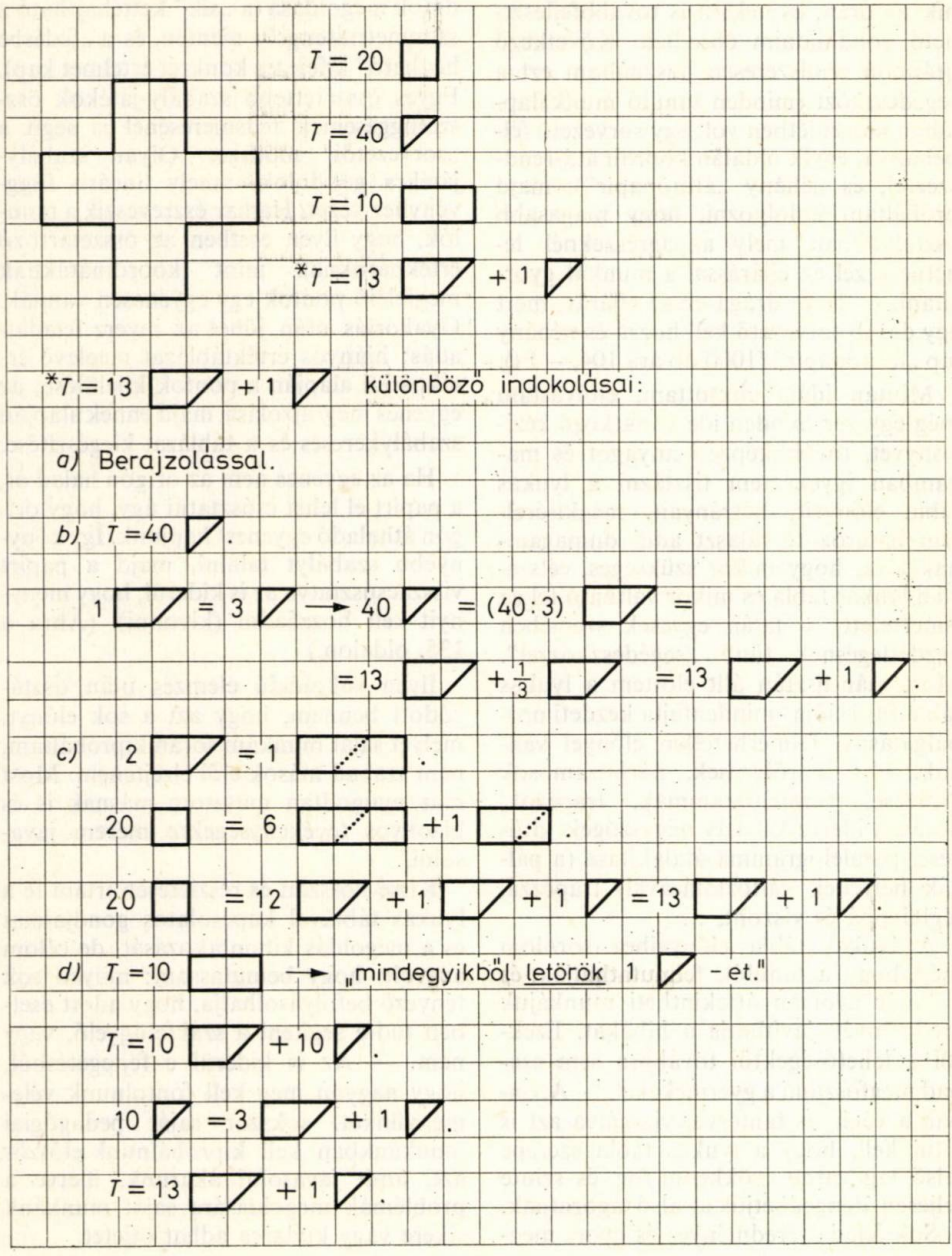
Ezek a tapasztalások növelték gondjaimat, de megoldást még mindig nem találtam. — Zavart még az is, hogy a tanulók „kitűzései" nem maradandók, nem vihetik haza a táblát, otthon nem „kísérletezgethetnek". — Ha valamelyik órán a pedagógus kifut az időből, és a kitűzés elemzése, a megfigyeltetés következő órára marad, a következő órán elölről kezdhetik a kitűzést, hiszen az órák végén az eszközöket gondosan el kell pakolni. — Ez sok időveszteséget, üresjáratot jelent és a tanmenettől való lemaradást okozhatja (fokozhatja).

Mi legyen (lehet) a megoldás?

Ekkor segítségemre sietett egy váratlan epizód saját pedagógiai munkámban. — Tanítási órámra külföldi vendégeket jelentettek be, akik az „új" tanterv iránt érdeklődtek. Nagyon szép és főleg jó órát szerettem volna tartani, mert felelősnek éreztem magam azért, hogy milyen tapasztalatokkal mennek el a vendégek. — 5. osztályban a „területmérés alkalmi egységekkel" volt az anyag. Szépnek ígérkezett. A baj ott kezdődött, hogy a legszebb feladat, amely kapcsolható halmazképzéshez, logikai nyelvhasználathoz, ... csak a végleges tanterv 5. osztályos anyagában szerepel. (Az én 5. osztályom átmeneti tantervű volt.) — A szükséges rajzok elkészítése olyan munkaigényes volt (hasonló feladat látható a végleges 5. osztályos munkalapok 12. oldalán: 2. feladat), hogy ha a tanulókkal akartam volna megrajzoltatni, akkor agyonütöttem volna az egész órát. Csak egy esetben éreztem alkalmazhatónak a feladatot, ha minden tanuló óra elején készen kapja a feladatlapot, mégpedig olyan kivitelben, hogy azon dolgozni tudjon. (Az írásvetítő nem helyettesíthette ebben az esetben a tanulók egyéni munkáját.) — Ekkor jött a „nagy ötlet"! Vettem 30 darab sorvezetőt (négyzetrácsos oldalán a négyzetek mérete éppen 1 négyzetcentiméter), ráhelyeztem egy vékony átütő papírt, 30 példányban lekopíroztam az ábrát és azokat sorvezetővel együtt (gemkapoccsal összefogva) adtam a tanulók kezébe. Azon dolgoztak, gyors, pergő volt az óra üteme, a tanulók nagyon élvezték (én is!). — Óra végeztével a tanulók megtarthatták a lapokat, hazavihették és otthon még tervezhettek az egyes részhalmazokba illő alakzatokat.

Ez az ötlet további gondolatot is adott! A területmérést előkészítő feladatot is a sorvezetők segítségével oldottam meg.

Először lyukas táblán tűzték ki a 20 kis négyzetből álló alakzatot, majd ennek területét különböző egységekkel mérve kellett megállapítani. Az alakzatot a tanulók pillanatok alatt átmásolták az „átütőpapírra" és azon próbálkoztak. Ahogy az egységeket változtattam, többször is le tudták rajzolni az alakzatot. Az eredményt ugyanarra a papírra írhatták.



A tanulók megnyilatkozásai itt differenciálódtak. Volt tanuló, aki rajz nélkül — pusztán okoskodással — igen ötletes megoldásokat talált, a többség azonban szorgalmasan rajzolt.

Ezzel megindult a tanulók fantáziája, a szülők végre láthatták, hogy mi történik az órán, és nekem is továbbfejleszthető gondolataim ébredtek. Következő óráimon rendszeresen használtam ezt a segédeszközt (minden tanuló munkalapjában készenlétben volt egy sorvezető félbehajtva, egyik oldalán koordináta-rendszerrel, és néhány „átütőpapír"), majd próbáltam kidolgozni, hogy magasabb osztályokban mely anyagrészeknél lehetne ezzel az eljárással a munkát gyorsítani. — Nem drága ez az eljárás, mert egy darab sorvezető kell hozzá és néhány lap „átütőpapír" (1000 db ára 104,— Ft).

Miután idáig eljutottam, elolvastam még egyszer minden ide vonatkozó kézikönyvet, továbbképzési anyagot és magamban igyekeztem tisztázni a lyukas tábla előnyeit, hátrányait, megkíséreltem határozott választ adni önmagamnak arra, hogy mikor szükséges, célszerű a lyukas tábla és mikor váltható fel az ismertetett — talán egyesek szemében kezdetlegesnek tűnő „segédeszközzel". Most már tisztán állt előttem a lyukas tábla funkciója: mindenfajta kezdeti próbálgatásnál felmérhetetlen előnyei vannak. Pl.: merőlegesek, párhuzamosok kitűzése, paralelogrammák, trapézok, konvex, illetve konkáv négyszögek kitűzése, paralelogramma átalakítása (a pálcák helyének változtatásával) trapézzá, téglalappá és viszont, ...

A lyukas tábla előnyeihez sorolom még, hogy a tanulók felmutathatják, és a tanár gyorsan áttekintheti munkájuk eredményét, javíthatja a hibákat. Ezektől a lehetőségektől továbbra sem szabad megfosztani a gyermekeket. — Azonban a végleges tantervet vizsgálva azt is látni kell, hogy a lyukas tábla szerepe felső tagozaton csökkenni fog, és szinte teljesen átengedhetjük az alsó tagozatnak.

Sok feladat eredményes és gyors megoldását segítheti elő az ismertetett „sorvezetős" eljárás. Ilyen feladat például: pontok helyének meghatározása; három adott ponthoz egy negyedik kerestetése úgy, hogy paralelogramma keletkezzék; kerületek, területek leolvastatása; szimmetriával kapcsolatos összetettebb feladatok megoldása (a „sík" kettéhajtható a szimmetriatengely mentén, és a „fedésbe hozható" kifejezés konkrét értelmet kap). Egyes összetettebb szabály-játékok összefüggéseinek felismerésénél is segít a „sorvezetői" módszer. Olyan szabályjátékra gondolok, amely lineáris függvényhez vezet. Hamar észreveszik a tanulók, hogy ilyen esetben az összetartozó értékpároknak mint koordinátáknak megfelelő pontok egy egyenesen vannak. Gyakorlás után jöhet az inverz feladatadás: hiányos értéktáblázat meglevő értékpárjai alapján a pontok kijelölése, az egyenes megrajzolása, majd ennek alapján szabálykeresés és a táblázat kiegészítése.

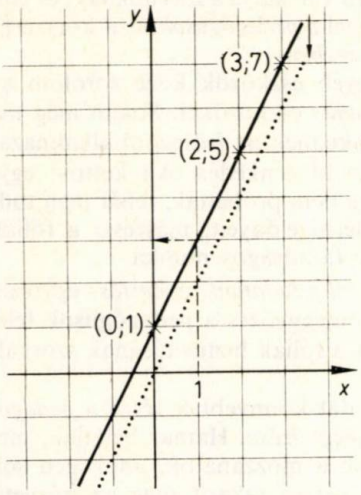
Ha az egyenes nem az origón halad át, a papírt el lehet csúsztatni úgy, hogy origón áthaladó egyenest kapjunk. Így könnyebb szabályt találni, majd a papírt visszacsúsztatva az is kiderül, hogy menynyit kell hozzáadni (kivonni). (Ábra a 135. oldalon.)

Ilyen sokoldalú elemzés után tisztázódott bennem, hogy azt a sok előnyt, melyet saját munkám során kipróbáltam, nem szabad mások elől elrejtenem. Most már nyugodtan mutatom másnak is és bizonyos tevékenységekre merem javasolni.

Kissé hosszan és részletesen írtam le a lyukas táblával kapcsolatos gondjaimat és a megoldás kibontakozását, de célom az volt, hogy bemutassam: milyen sok tényező befolyásolhatja, hogy adott esetben tud-e segíteni a szakfelügyelő, vagy nem. — Az is kiderül e fejtegetésből, hogy nagyon meg kell fontolnunk véleményünket, sokszor saját pedagógiai munkánkban kell kipróbálnunk először azt, amit javasolni akarunk, illetve a problémák megoldására saját munkánk sikere vagy kudarca adhat ötletet.

Keress szabályt!

x	2	3	0	1	4	7		
y	5	7	1					



a) Az első három értékpárnak megfelelő pontok megkeresése.
b) _____ egyenes megrajzolása.
c) A papír csúsztatásával az egyenes párhuzamos eltolása. .....
d) Ennek alapján $y = 2x$ szabály megállapítása.
e) A papír visszacsúsztatása 1 egységgel az y tengely pozitív irányába.
f) Ennek alapján $y = 2x + 1$ szabály.
g) A szabály vagy az ábra alapján a táblázat kitöltése, további értékpárok keresése.

Óvakodnunk kell a megalapozatlan véleménynyilvánítástól, mert az elhamarkodott, megfontolatlan vélemény sokat árthat az ügynek.

A logikai készlet sokoldalú alkalmazása terén mutatkozik legkevesebb probléma. Kartársak és gyerekek egyaránt szeretik, sokoldalúan és jól alkalmazzák. Az ötletes feladatokat a szakfelügyelő szívesen továbbítja, terjeszti. Ezt minden esetben meg is kell tennünk.

A színes rúdkészlet felhasználásával kapcsolatban már gyakrabban kell kiegészítő tanácsot adni, mert a nem elég invenciózus kartársak nehezen ismerik fel, hogy milyen sokoldalú lehetőség rejlik benne. — Apróbb fogásokat is elleshetünk ügyesebb pedagógusoktól, és azokat továbbítanunk kell. Pl., ha törtrészek kerestetésekor a megfelelő színes rúd felmutatásával akar ellenőrizni a kartárs, zárt marokban kell a gyerekekkel tartatni a rudacskát mindaddig, míg minden tanuló meg nem találta. Ellenkező esetben a gyengébb tanulók „másolni" fogják társaik munkáját, és ezzel nem érjük el a kívánt célt. — ...

A három alapvető eszköz felhasználási területeiről nem kívánok többet szólni, mert a különböző kiadványok részletesen tartalmazzák a szükséges tudnivalókat.

Mi az, amire mégis *figyelnünk kell?* Az eszközökkel történő tevékenykedtetés megszerveztetésére, vagyis a tanítási óra munkájának szervezésére, — Ha ugyanis ez kifogásolható, a kartárs nem gondol rá, akkor csak a rendbontás lehetőségét látja az eszközben (a diák is), és nem valószínű, hogy a hibát magában fogja keresni.

Ilyen esetben a szakfelügyelő feladata, hogy elmagyarázza a munkaszervezés módját. — Ilyenkor meg szoktam mutatni saját vázlatomat, amelynek szélén az egyes feladatok után ilyen bejegyzések vannak: „Tedd el a lyukas táblát a padba!" és „Vedd elő a logikai készletet!"... Sok pedagógusnak még azt is a „szájába kell rágni", hogy előbb jön a „Tedd el..." és csak azután a „Vedd elő..." — Lényeges felhívni a figyelmet arra is, hogy a felszólítások után időt is kell hagyni a tanulónak az utasítás végrehajtására.

Kicsinyes, apró kérdésnek tűnik a „munkaszervezés" kérdése, de tapasztalatom szerint sok múlik rajta. — Ha nem jól szervezik a munkát, hiányozni fog az óráról a nyugodt légkör, ami viszont nem használ az ügynek.

A három alapvető eszközön kívül tudnunk kell, hogy vannak egyéb eszközök is, melyek nem alapvetőek, de hasznosak. Elsősorban gondolok itt a *Dienes-készletre, sík- és térmértani* modellezőre és a *nulla-középpontú* számolólécre. — Az első kettő már kapható, *minden iskola saját költségvetése terhére beszerezheti.* — Ez ismét kényes kérdés és feladatot jelent a szakfelügyelőnek:

— *a pedagógust meg kell győzni* felhasználási lehetőségeiről, meg kell tanítani a felhasználás módját is. Pl. hogyan szervezze a munkát, ha kockát akar összeállíttatni a modellezőből celluxszal és közben rendezett munkalégkört akar biztosítani. — Nem mindenkinek van adottsága arra, hogy magától kitalálja a legmegfelelőbb módot. Voltam olyan órán, ahol a padlótól kezdve a gyerekek feje búbjáig mindenhol volt cellux, legkevesebb azonban a modelleken. Vándorolt a levágott cellux az ollóról a gyerek kezére, majd ott egyik ujjáról a másikra...
Ilyen esetben nekünk kell betölteni a „szaktanácsadó" szerepét. — Megint egy apró kérdés, de lényeges, és ezt megoldhatta volna egy „Műhelytitkok" című kiadvány, mint már említettem.

— a pedagógus meggyőzése után következik a nehezebb feladat: *az igazgató meggyőzése,* hogy áldozzon pénzt a matematikaoktatás színvonalának fejlesztésére, mert sokszorosan meghozza kamatát. Megvallom, hogy kaptam olyan választ is: „Ha reformot akarnak, akkor biztosítsák a feltételeket!" Ezt az igazgatót nehéz volt meggyőzni. — Nem is vagyok biztos az eredményben. — Szerencsére kevés az ilyen igazgatók száma! — Többségük hallgat a szavunkra és — nem egy esetben — másnap már adta a csekkfüzetet és megbízta a pedagógust a beszerzéssel.

Általában van súlya a szavunknak, és élni is kell ezzel a *pedagógusok* és a korszerűsítés *érdekében.*

Az egyéb eszközök közé sorolom az *audiovizuális* eszközöket. Sokan még ma is idegenkednek az *írásvetítő* alkalmazásától. Az idegenkedés oka kettős: egyrészt még nem próbálták, tehát nem tudják felmérni előnyeit, másrészt a fóliák készítése fáradságos munka.

Így a *mi feladatunk is kettős:* egyrészt biztatás, meggyőzés a pedagógusok felé, másrészt a fóliák biztosításának szorgalmazása.

A feladat könnyebbik része a *pedagógusok meggyőzése.* Hamar belátják, melyek azok a mozzanatok, ahol igen sok hasznos percet takarít meg az írásvetítő. — Természetesen arra is fel kell hívni a figyelmet, hogy az írásvetítő nem jelent magában véve korszerű oktatást. Rendeltetésszerű alkalmazása fontos tényezője az eredményességnek. (Pl. előfordulhat, hogy egy tanítási órán csak 5 percig használjuk, de lehet olyan óra is, amikor egyáltalán nem kerül rá sor.)

A feladat nehezebbik része *a fóliák biztosításának szorgalmazása.* Sajnos, e téren még kevés a központi kezdeményezés. Nincsenek általános iskolai matematikaoktatáshoz készen kapható fóliák. Ezért egyes pedagógusok éjszakába nyúlóan gyártják a fóliákat, mások pedig inkább nem használják az eszközt. — Tény, hogy nem lehet megkívánni általánosan, hogy a pedagógus egy tanítási órára több órát készüljön — beleértve a fóliakészítést is. — Még abban az esetben is, ha az illető ezt szívesen teszi, figyelmeztetnünk kell, hogy nem fogja sokáig bírni. Az energia túlfeszítése előbb-utóbb megbosszulja magát. Ha másképp nem, akkor úgy, hogy fáradtan megy be az órára, lesznek gyönyörű fóliái, de energiája már alig marad az óra módszeres levezetésére.

Mi tehát a teendő? — Sokat nem tehetünk! Javasolhatjuk, kérhetjük, hogy készítsenek központilag fóliákat. — Azonban ebben, mint „gyors segély"-ben, alig reménykedhetünk. — Már járhatóbb útnak látszik, amit magam is próbálok szorgalmazni az egyes iskoláim, illetve területi egységeim munkaközösségeinek. Javaslom, hogy munkatervükbe iktassák be a „fóliaprogramot". Ez azt jelenti, hogy fogjanak össze, osszák fel maguk közt a feladatokat és közösen készítsék el iskolájuk fóliaanyagát. — Sajnos, még ez is nagy munka: Kedv volna hozzá, de a megvalósítás nehéz: nincs fólia, rossz minőségűek a tollak, drága a fólia (toll), az iskolának nincs pénze, ...

Járható lenne az az út is, ha egy-egy területi egység (kerület) beszerezne egy hőmásolót, ráállítana egy embert (státussal) és a kartársak egy-egy sikerült, használható fóliáját sokszorosítaná a közigazgatásilag hozzá tartozó iskolák számára. — No, de itt megint megbuktam, mert egy hőmásoló 6000,— Ft, a másolófólia drága, no meg a „státus", tehát megint pénz, ami nincs. Tehát minden marad változatlanul? — Tudom, hogy túlságosan kis ember vagyok ahhoz, hogy a „világot megválthassam", — mégis nehezen tudok belenyugodni ebbe a helyzetbe!... és sajnálom a pedagógusokat, ... sajnálom a gyerekeket, mert végső fokon ők lesznek „szegényebbek" (szerencsére nem tudják!).

Az IR és ITV műsorainak alkalmazásával is komoly problémák vannak. E problémák egy része helyi adottságokból — pl. órarendi tervezésből — következik, ezeken nem tudunk segíteni. Más részük azonban a pedagógus kényenyelemszeretetéből, nemtörődömségéből ered. — Feladatunk tehát e téren is van. Fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy a magyar állam súlyos milliókat áldoz ezeknek az adásoknak sugárzására (képmagnó készítésére), és ha nem használjuk ezeket, akkor az állam pénzét pocsékoljuk. — Ezenkívül a hasznosságukról is szólnunk kell.

Ide sorolom a *pergőfilmek* problémáját is. — Vannak jó pergőfilmek (ha nem is sok), de sajnos, nem használják azokat. A közelmúltban egy iskolában egy tanítási órán pergőfilm vetítése vezette be a Thalész-tétel tanítását. — Ekkor kerültem szembe azzal a megdöbbentő ténnyel, hogy 12 év óta járom az iskolákat, közel két és fél ezer tanítási órát láttam, és ez volt az *első*, ahol a pedagógus használta a pergőfilmet. — Pedig ez csak a kellő előretervezés hiánya és kényelemszeretet. — E téren komoly tennivalóink vannak.

A „számolási készség féltése" munkánk egy újabb területe. Az új tanterv bevezetésével kapcsolatban gyakran felmerülő probléma: fognak-e tudni gyermekeink számolni? Különösen szülők körében gyakoriak az ehhez hasonló megjegyzések. — Ezekkel kapcsolatos teendőinkről már szóltam. — Nagyobb a baj akkor, ha pedagóguskörökben találkozunk ilyen megnyilatkozásokkal. (Alsó tagozatos kartársak közt gyakori.)

Mi a teendőnk ilyenkor?

Először magunkban kell tisztáznunk a kérdést. Végig kell gondolnunk a tantervi anyagot, a feldolgozási módját és meg kell vizsgálnunk: kizárja-e az új tantervi koncepció a numerikus számolási készség fejlesztését? — Miután megértettük, meggyőződtünk arról, hogy a kettő nem mond ellent egymásnak, csak funkcióváltozás történt: a számolási készség célból eszköz lett, ekkor kezdhetjük vizsgálni az ellenhangulat okait.

Első kérdés, hogy mit mutatnak az eredmények. Ha nem rosszabb a számolási készség az új tanterv szerint tanuló osztályokban, mint a hagyományos tantervűekben, akkor könnyű a dolgunk, hiszen az eredmények önmagukért beszélnek. Különösebb érvelésre nincs szükség.

Ha helyileg egyes eredmények a kételkedőket igazolják, akkor kell alaposan

megvizsgálni az okokat. — Rendszerint kiderül, hogy ezeken a helyeken a pedagógusok nem jól értelmezve tennivalójukat, valóban elhanyagolják a számolási készséget mint eszközt. — Ez esetben közbe kell lépnünk, meg kell magyaráznunk a helyes eljárásmódot, bemutató foglalkozások szervezésével mintát kell mutatnunk. Minél szélesebb körben tudatosítanunk kell, hogy *a számolási készséggel nem lesz probléma, ha jól végezzük feladatunkat.*

Lehetne szólni még arról, hogy mi a szakfelügyelet szerepe a *követelményrendszer* helyes értelmezésével, az *értékelés-osztályozás* módjainak helyes alkalmazásával kapcsolatban, a *felmérések* feladatanyagának összeállításában, azok értékelésében, ... Ezekről nem szólok részletesebben, mert hivatalos állásfoglalások, irányelvek, szaklapok cikkei bőven foglalkoznak a kérdésekkel, és viszonylag nem nehéz megtalálni a helyes utat.

Nekünk e területeken valóban csak ellenőriznünk kell a helyes végrehajtást, meg kell akadályoznunk a túlkapásokat, illetve a liberalizmust.

Az eddig felsorolt gondjaink közül nem hagyhatom ki *a segédletek, tankönyvek, ... problémáit sem.*

Az új, illetve átmeneti tanterv bevezetése a tankönyvíróktól, szerkesztőktől, kiadótól rohammunkát kívánt. Ennek voltak és vannak olyan káros következményei, amelyek kedvezőtlen közhangulatot teremtenek, illetve zavarják a munkát.

Elsőként szólok *a késve megjelent* segédletekről. Bizony elég kellemetlen, ha a tankönyv, kézikönyv nincs kellő időben a területen.

Ezen sajnos mi nem segíthetünk érdemben, de valamit azért mégis tehetünk: az indokolatlan méretű „felháborodást" csillapíthatjuk és mindent meg kell tennünk, hogy szakmai segítségnyújtással támogassuk a kartársakat.

Második probléma, amely szintén a rohammunka eredménye, hogy akad a tankönyvekben olyan rész, mely kifogásolható: pl. a 7. osztályos tankönyv egyes részletei (százalékszámítás, közelítő számítás, paralelogramma területének feldolgozása, a feladatok több helyen nincsenek összhangban a szöveggel, ...). A fejlettebb, gondolkodóbb pedagógus ezt észreveszi és rendelkezik annyi önállósággal, hogy munkája során a helyes feldolgozásmódot alkalmazza!

A kevésbé önálló pedagógusok sajnos úgy gondolkodnak, hogy — mivel a tankönyv hivatalos segédlet — minden mondatát kötelesek maradéktalanul és változtatás nélkül átvenni. — Ezeket az embereket bátorítanunk kell és meg kell velük értetni, hogy egyetlen hivatalos — törvényerejű — dokumentum a tanterv. Azon nem szabad változtatni. A többi segédlet csupán segédeszköz, amely ötletet ad. Ezeket kritikával figyeljék és ha — a tanterv megsértése nélkül — jobb feldolgozásmódot találnak, azt bátran alkalmazhatják.

Eddig az új tantervvel kapcsolatos permanens fejlesztésről szóltam. Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról sem, hogy a *hagyományos tanterv* érvényben lesz még néhány évig (3 évig kihaló rendszerben). Biztatnunk kell arra, hogy a korszerűsítés már a hagyományos tanterv szerinti tanítás közben is megindulhat. Sok olyan eleme van az új tantervnek, amely átvihető a hagyományosba is.

Nem szabad abba a hibába esni, hogy idő előtt nem *figyelünk* a hagyományos tantervre, és esetleg ott keletkeznek komolyabb bajok.

A részletes fejtegetés mutatja, hogy milyen sokrétű a szakfelügyelet feladata működési területén. — Nem lenne teljes a feladatok felsorakoztatása, ha nem azzal fejeződnék be, hogy mindarról, amit területünkön tapasztalunk, *kötelességünk feletteseinket tájékoztatni,* javaslatokat tenni a hibák orvoslására, utalni a továbbfejlesztés lehetőségeire. Hiszen mi vagyunk az összekötő, közvetítő kapocs az élő gyakorlat és az oktatás irányítói között.

II.

Mi a szakfelügyelő szerepe a távlati fejlesztésben?

Mindnyájan tudjuk, hogy a korszerűsítési folyamat nem állhat meg. Tovább kell folyni a kísérleteknek, ami a meglevő továbbfejlesztése, tökéletesítése. — E téren a szakfelügyelő szerepe tulajdonképpen az, amit az előző rész végén már megállapítottam: a jelen helyzetről tájékoztatni, hamisítatlan képet adni, hogy alapul szolgálhasson a kutatók, kísérletezők munkájának.

Azokat a pedagógusokat pedig, akik alkalmasak kísérletezésre és hajlamosak is rá, biztatnunk kell és fel kell hívni rájuk a kísérletek irányítóinak, gondozóinak figyelmét.

Az **I.** és **II.** rész terjedelmének feltűnő aránytalansága legyen szimbólum! Fejezze ki azt, hogy a szakfelügyelő elsősorban a *jelen* gondjaival foglalkozik! A jövő tervek kidolgozásáért mások felelősek.

KOLLER LÁSZLÓNÉ
főelőadó
Országos Pedagógiai Intézet

Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából

kísérleti anyag
I. osztály, 1. rész

Bevezetés

Követelményrendszerünkben a tanterv három fő területét — a nevelés, a képzés és az ismeretanyag — vesszük sorra részletezőbben és pontosítjuk a szaktárgyi oktatómunka tartalmát és feladatait.

A *matematikaoktatás nevelő hatását* már igen régen felfedezte a pedagógia, de ez alatt a nevelőhatás alatt szinte kizárólag a logikus gondolkodásra nevelést értették. A matematikaoktatásnak ez a feladata természetesen nagy jelentőségű, de az általa kifejthető nevelőhatás korántsem áll csak ennyiből.

Hogy pontosan megláthassuk, milyen területeken fejleszthetjük tanulóinkat, gondosan elemeznünk kell magának a matematikai megismerésnek a folyamatát.

A matematika, mint minden tudomány, az anyagi valóságot tükrözi. A valóság megismeréséhez itt is sok és igen sokféle tapasztalat vezet. A tapasztalatszerzés alapos figyelmet igényel, a tapasztaltakat állandóan vizsgálni, elemezni kell, a közös jegyeket kiemelni, a különbségeket tudatosítani, a lényegest a lényegtelentől elválasztani, és ennek alapján általánosítani, majd megalkotni a megfelelő modellt.

Ez az út és ezek a személyiségtulajdonságok nem csak a matematikában, hanem bármely más területen is szükségesek. A matematikai modell megalkotásának útja a megfigyelő-, elemző-, általánosítóképesség fejlesztése más területeken is hasznos lesz. Ugyanez mondható el a modell alkotáshoz szükséges alkotófantázia fejlesztéséről is. Ezen túl a leírt tapasztalatszerzési folyamatnak fontos filozófiai jelentősége van: minden erőltetettség nélkül adódik, hogy a legelvontabb fogalmak is az anyagi világban, az arról szerzett konkrét tapasztalatokban gyökereznek.

A matematikai megismerés folyamata nem merül ki a modellalkotással. Ezt követi a logikai következtetések sora, ez alatt valóban a logikus gondolkodás fejlesztése kap igen nagy jelentőséget.

Ezzel kapcsolatosan olyan személyiségjegyek fejlődnek, mint: ítélőképesség,

kritikai érzék, önkritika, gondolkodás fegyelmezettsége, alaposság, körültekintés, ötletesség, találékonyság, kitartás stb.

Általában a megszerzett ismeretet, készséget valamilyen formában meg is kell fogalmazni, rögzíteni, esetleg lejegyezni. Itt újabb nevelési területeknek jut szerep: kifejezőkészség, esztétikai érzék, kézügyesség fejlesztése.

Az ismeretszerzés, készségfejlesztés folyamata közösségben, osztálykeretben történik. Így a közösségben végzett munka ismét újabb nevelési lehetőségeket nyújt: helyes közösségi magatartás, jól értelmezett segítőkészség kialakítása, szóbeli kifejezőképesség, vitakészség fejlesztése, siker és kudarc elviselésének képessége, igazi belátáson, nem tekintélyalapon történő véleményváltoztatás képessége.

Az itt felsorolt nevelési lehetőségek csaknem minden témakör tárgyalása közben fellelhetők. Némelyek azonban fokozottabb hangsúlyt kapnak az egyes témák kapcsán, ezekre ott külön utalunk még.

Nem nevelési követelményeket írtunk és írunk le, hanem a matematikaoktatásban rejlő nevelési lehetőségek meglátásához kívántunk segítséget nyújtani. Ezen a területen követelményeket megszabni, ezeket mérni, jelenlegi ismereteink alapján szinte lehetetlen. A tanároknak viszont törekedniük kell, hogy felismerjék és éljenek az adódó nevelési lehetőségekkel.

A szükséges *ismereteket* és *képzési feladatokat* szoros egységben tárgyaljuk követelményrendszerünkben, mert e területek a matematikában igen összefonódnak és így szétválasztásuk erőltetett lenne.

A szükséges ismeretek, jártasságok, készségek és képességek mellett megjelöljük ezek elsajátítási szintjét is. Lényegében három szintet különböztetünk meg: a „megértés", a „felismerés" és az „alkalmazás" szintjét. A pedagógiai irodalom közel sem használ egységes terminológiát. Ahol úgy éreztük, hogy ezek a kifejezések nem teszik egészen világossá, hogy mik az elvárásaink, ott körülírjuk, vagy esetleg példával illusztráljuk azokat. Vannak azonban olyan ismeretek, jártasságok, készségek és képességek, amelyek elsajátítási szintje nem, vagy csak igen kevéssé jellemezhető e három kategória egyikével, esetleg egyszerre több is érvényes rájuk, vagy különböző időben másik-másik kap hangsúlyt. Igyekeztünk ezért az erőszakolt kategorizálást elkerülni és ilyenkor is inkább körülírjuk elképzeléseinket.

A három kategória egyébként nem feltétlen jelent alacsonyabb, illetve magasabb szintű szellemi tevékenységet. Általában az alkalmazási szint a legmagasabb szint, de elképzelhető, hogy adott esetben a felismerés vagy esetleg a megértés szintje magasabb. Például a Pitagorasz-tételnek és bizonyításának megértése magasabb szintű szellemi tevékenységet jelent, mint esetleg a tételnek egy igen egyszerű feladaton való alkalmazása.

A követelményrendszerben az optimumot adtuk meg, ezen belül megjelölve (a szöveg mellett húzott vonallal) a minimumot. A tantervi minimum nem lehet alapja a tanuló megbuktatásának. Nem a negatív minősítés megállapítására ad alapot, hiszen igen sok más, a követelményrendszerbe nem foglalt tényező is szerepet játszik az elmarasztaló, elégtelen érdemjegy kialakításában. A minimum megállapításának sokkal inkább az a szerepe, hogy a tananyag belső összefüggéseinek a szem előtt tartásával, a közműveltség elemeinek megjelölésével adjon útbaigazítást a nevelőnek: mit szükséges, mit kell a tanulónak tudnia ahhoz, hogy a tanterv további ismereteit megértse, elsajátítsa, hogy korszerű műveltségű szakmunkássá váljon. A két határ közt tág teret biztosítottunk az egyes szakmák szakmai igényeinek, illetve az egyes iskolák tanuló-összetételének figyelembevételére. A pontos határt a szakmai munkaközösségek igen gondos mérlegelés és az illetékes szakfelügyelet véleményének kikérése után állapítják meg.

I. téma: Az általános iskolai anyag év eleji ismétlése, kb. 25 óra

Nevelési területek (feladatok)

El kell kezdenünk a tanulókat olyan közösséggé szerveznünk, amely megfelelő keretet nyújt mind az egyéni, mind a csoportos vagy közös osztálymunkához. El kell érnünk, hogy könyveiket, füzeteiket stb. egyéb szükséges segédleteiket rendben tartsák és minden órára elhozzák közülük a szükségeseket. Merjenek véleményt alkotni, ezt ki is fejezni, az eredményt és esetleg a kudarcot megfelelően tudomásul venni.

A halmazokkal és relációkkal való ismerkedés sok matematikai és nem matematikai probléma vizsgálatával indul. E fontos matematikai fogalmaknak a valósághoz való kapcsolata kézenfekvő.

Miközben tanulóinkkal kerestetjük a halmazhoz tartozást meghatározó jellemző tulajdonságot, két halmaz közös elemeit meghatározó tulajdonságot vagy bizonyos relációk érvényességi körét, fejlődik megfigyelő, lényegkiemelő absztrakciókészségük.

Az általános iskolai aritmetikaanyag, ismétlése közben a figyelem, a pontosság, az önellenőrzés kap hangsúlyozottabb szerepet.

Ügyeljünk a problémák megfogalmazására. A gyakorlati életből vett megfelelő feladatok nem matematikai tartalma is nevelési lehetőséget nyújt. Vigyázzunk azonban, mert ha a nevelési célzatú megfogalmazás erőltetett, éppen ellenkező hatást érünk el vele.

Ismeretek, képzési feladatok

> Halmaz szemléletes fogalmának ismerete megértés szintjén. Halmaz megadási módjainak ismerete. El tudják dönteni valamiről, hogy eleme-e egy adott halmaznak, vagy sem (egyszerű konkrét példák alapján pl. eleme-e a négyzet a sokszögek halmazának? stb.). Egy adott halmaz elemeire jellemző közös tulajdonság (ha van ilyen) felismerése konkrét esetben. Részhalmaz fogalmának ismerete (megértés szintjén): El tudják dönteni bizonyos elemekről, hogy részhalmazát képezik-e bizonyos adott halmaznak (egyszerű konkrét esetekben pl. a 6-tal osztható számok részhalmazát képezik-e a 3-mal osztható számok halmazának? stb.). Tudják, hogy mit értünk két halmaz közös részén (megértés szintjén). Fel tudják ismerni konkrét esetben két halmaz közös elemeinek halmazát.

Ugyanezt meg tudják tenni 3 halmaz esetében is. Tudják Venn-diagrammal ábrázolni a részhalmazt és halmazok közös részét.

> Ismerjenek egy pár egyszerűbb relációt. Egyszerűbb relációk — nemcsak nagysági relációk — legegyszerűbb tulajdonságainak felismerése. Pl. megfordítható relációk: egybevágósági, párhuzamossági relációk stb. meg nem fordítható relációk, pl.: bizonyos rokoni relációk, egyenlőtlenségi relációk stb.

Annak megértése, hogy a halmazok közt fennálló nagysági relációkat számlálás nélkül párba állítással is meg lehet állapítani.

Ismerjék a számlálás és a halmaz számosságának fogalmát (megértés szintjén).

A természetes szám fogalmának megértése: ugyanannyi (véges számú) elemű halmazok közös tulajdonsága. Üres halmaz fogalmának megértése (nulla, mint a legkisebb természetes szám).

Tudják ábrázolni a természetes számokat a számegyenesen.

Értsék, hogy az egység megválasztása tetszőleges.

Értsék a tízes számrendszer fogalmát: meg tudják mondani, hogy mit értünk számok alaki és helyi értékén. Ezt az ismeretet alkalmazni is tudják később, pl. a műveletek értelemszerű elvégzésekor. Biztonságosan el tudják végezni a négy alapműveletet a természetes számok körében, eredményeiket becsülni és ellenőrizni tudják — mindezt az alkalmazás szintjén.

Tudjanak csoportosítani 2, 3, 4 stb. hatványai szerint, a csoportok számát táblázatba foglalni. Értsék a különböző alapú számrendszerek elvét. A műveletek halmazműveletként történő értelmezésének megértése. (A szakmai igényeknek megfelelően a fejben történő műveletvégzés követelménye igen különböző lehet.)

Értsék az egyes műveletek közötti összefüggéseket és ezt tudják alkalmazni az eredmények ellenőrzésekor.

Műveletek bemutatása számegyenesen.

Az egyes műveletek tulajdonságainak ismerete: felcserélhetőség, csoportosíthatóság. Ennek alkalmazása a műveletek legcélszerűbb elvégzése érdekében.

A legcélszerűbb műveleti sorrend megállapítása mint követelmény, egyes szakmák speciális igényei alapján különböző szinten várható el.

Összeg, különbség, szorzat és hányados szorzása, ill. osztása egy számmal (alkalmazás szinten).

Ismerjék és alkalmazni tudják a legegyszerűbb oszthatósági szabályokat (2-vel, 5-tel, 10-zel, 4-gyel, 3-mal, 6-tal, 9-cel való oszthatóság feltételei).

Tudják, hogy 0-val nem lehet osztani, ezt az ismeretüket alkalmazni is tudják később (pl. tört kifejezések számértékének kiszámításakor stb.).

Tudjanak sorozatokat, táblázatokat és grafikonokat készíteni az alapműveletek segítségével. (Az alapműveleteket mint egyváltozós függvényeket tekintsük. Pl.:

$y=x+2$
$y=3k$
$y=2x-1$ stb.) Ezzel a későbbi függvényfogalmat készítjük elő.

Ismerjék fel a szóba jöhető műveleteket (szabályokat) táblázatok, grafikonok és sorozatok alapján.

Értsék a törtek származtatását, és ismerjék az itt előforduló elnevezéseket és jelöléseket.

Tudják ábrázolni a törteket a számegyenesen. Értsék, hogy milyen kapcsolat van a közönséges és a tizedes tört fogalma közt.

Értsék a törtbővítés és -egyszerűsítés fogalmát, tudják ezt alkalmazni is (pl. törtek közös nevezőre hozásakor).

Meg tudják állapítani, közönséges tört alakban adott számokról, hogy melyik nagyobb.

Ismerjék fel a nagysági relációkat különböző nevezőjű törtek között is. Bizton-

ságosan (alkalmazás szinten) el tudják végezni a négy alapműveletet a törtek körében is akár közönséges, akár tizedes tört alakban adottak is.

Az alapműveletek fejben történő elvégzésének követelménye a törtek körében, speciális szakmai igényeknek megfelelően igen különböző szinten várható el.

Ismerjék fel, hogy a természetes számokkal végzett műveletek bizonyos tulajdonságai (felcserélhetőség, csoportosíthatóság, összeg-, különbség-, szorzat és hányados szorzására és osztására vonatkozó szabályok) a törtek körében is érvényben maradnak. Törtrész kiszámítása egészből és egész kiszámítása törtrészből következtetéssel (alkalmazás szinten, egyszerű gyakorlati feladatokon).

Tudjanak sorozatokat, táblázatokat és grafikonokat készíteni az alapműveletek felhasználásával ebben a számkörben is. Ismerjék fel a szóba jöhető műveleteket (a szabályokat) táblázatok, grafikonok vagy sorozatok alapján.

Törtrész kiszámítása egészből és egész kiszámítása törttel való szorzás és osztás útján. (Ez a követelmény is a speciális szakmai igényeknek megfelelően igen különböző szinten várható el.)

Negatív szám fogalmának megértése. Abszolútérték fogalmának ismerete. Meg tudják állapítani adott számok abszolútértékét. Tudják ábrázolni a számegyenesen a negatív számokat. Tudják nagyság szerint sorba állítani a negatív számokat is.

Értsék meg a számfogalom kiterjesztését a teljes racionális számkörre.

Tudják ábrázolni grafikonon a racionális számokat és hozzájuk rendelt abszolútértéküket (függvényfogalom előkészítése).

Tudják halmazábrán ábrázolni a racionális számokat, ezen belül az egészeket és törteket, a negatív és pozitív számokat.

Ismerjék fel a nagysági relációkat a racionális számkörben. Alkalmazás szintjén tudják elvégezni a négy alapműveletet a teljes racionális számkörben. Eredményeiket becsülni és ellenőrizni tudják.

Ismerjék fel, hogy az alapműveletek mely tulajdonságai érvényesek a teljes racionális számkörben. Szöveggel adott problémák megoldásához tudjanak megoldási tervet készíteni és alkalmazni tudják a racionális számokról tanultakat a feladatok megoldásában.

Tudjanak sorozatokat, táblázatokat, grafikonokat készíteni a teljes racionális számkörben is az alapműveletek segítségével (itt is az alapműveleteket mint egyváltozós függvényeket tekintjük). Sejtsenek meg bizonyos függvénytulajdonságokat: törés, szakadás, növekedés, csökkenés stb.

Ismerjék fel táblázatok, sorozatok és grafikonok alapján a műveleteket (szabályokat és egyszerűbb esetekben meg is tudják fogalmazni ezeket).

Értsék az arány fogalmát (hányszorosa, hányadrésze).

Tudják felírni az arányt mint két szám hányadosát. Értsék, hogy mit jelent egy hányados formában adott arány. Értsék, hogy mit jelent egy arány reciproka. Lássák az összefüggést adott arány és annak reciproka közt (felismerés szintjén). Tudják, hogy mennyiségek arányát ugyanazzal a mértékegységgel mért mérőszámok arányával fejezzük ki. Ismerjék fel az arányos mennyiségeket: egyenes és fordított arányosság esetén.

Tudjanak egyszerűbb arányossági feladatokat megoldani következtetéssel (alkalmazási szint).

Értsék, hogy az arányossági feladatokat törttel való szorzással és osztással is meg lehet oldani. (Egyes szakmákban az utóbbi követelmény magasabb, alkalmazási szinten is elvárható.)

Tudják, hogy a százalék századrészekben megadott arányt jelent (felismerés szint).

Értsék, hogy mit jelent a: „százalékérték", az „alap" és a „százalékláb".

Ismerjék fel ezeket szöveggel adott feladatokban és értsék meg, hogy hogyan lehet a százalékszámítási feladatokban szereplő három mennyiség közül kettőnek az ismeretében kiszámítani a harmadikat következtetés útján (következtetés egy %-on keresztül).

Ismerjék fel, hogy a százalékszámítás tulajdonképpen arányossági feladatok megoldása. (Egyes szakmákban szükséges, hogy a százalékszámítási feladatok megoldását az arányosságról tanultak segítségével: törttel való szorzás és osztás útján is tudják végezni, mégpedig alkalmazási szinten.)

Tudjanak biztonságosan megoldani egyszerűbb százalékszámítási feladatokat következtetéssel (alkalmazási szint). Az „egyszerűbb" itt azt jelenti, hogy csak a három mennyiség: az alap, a százalék és a százalékérték szerepeljen a feladatban, de ne legyen a feladat olyan, hogy pl. a kiszámolt százalékérték ugyanabban a feladatban, a továbbiakban alap legyen stb. 100%-nál nagyobb százalékkal viszont tudjanak dolgozni.

Tudjanak megoldani összetettebb százalékszámítási feladatokat. Egy feladaton belül pl. a kiszámítandó százalékérték a továbbiakban alap, vagy adott százalék százalékának kiszámítása stb. (Szakmák szerint ez a követelmény a megértési szinttől a biztonságos alkalmazásig igen széles skálán mozoghat.)

Tudják két vagy több szám számtani közepét kiszámítani (alkalmazási szint).

Tudjanak arányos osztásra vezető szöveges feladatokat megoldani (alkalmazási szint). Biztonságosan (alkalmazási szint) ki tudják számítani adott képletek helyettesítési értékét (a képletekben az ismeretlenekkel a négy alapműveletet — vagy azok közül néhányat végeztetünk el).

Tudjanak egyszerűbb algebrai átalakításokat végezni ennek érdekében.

Ismerjék fel, hogy a képleteknek mely helyettesítési érték esetén van értelmük.

Tudják az eredményeket becsülni és ellenőrizni.

Tudjanak elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket megoldani mérleg-elv segítségével (alkalmazási szint).

Tudják ellenőrizni a kapott eredményt.

Tudjanak felírni egyszerűbb egyenleteket szöveg alapján.

Tudják, hogy az ezek megoldásakor kapott eredményt a szövegbe helyettesítéssel kell ellenőrizni.

Mérések

A követelményrendszert két éven keresztül 10—10 osztályban mértük. A mérésre szolgáló feladatlapokat változtatás nélkül közöljük, az elért eredmények statisztikai adatával együtt.

Még azokat a feladatokat sem változtattuk meg, amelyek túl nehéznek, vagy túl könnyűnek bizonyultak, ugyanis úgy érezzük, a statisztikai adatokkal együtt ezek még így is több információt nyújtanak, mint az esetleg helyükbe tett, ki nem próbált, megfelelőbbnek vélt feladatok.

ORSZÁGOS PEDAGÓGIAI INTÉZET
MATEMATIKAI NEVELÉSI OSZTÁLY

Szakmunkásképző iskolák matematika követelményrendszerének mérése I. osztály 1. téma

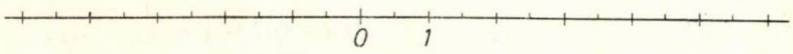
A. csoport

1. Írd az alábbi számpárok közé a megfelelő ($<$, $=$, $>$) jelet!

$-5 \ldots -2$; $0 \ldots -10$; $1 \ldots -3$; $1{,}2 \ldots 1{,}182$; $\frac{2}{3} \ldots \frac{3}{4}$; $\frac{1}{4} \ldots 0{,}25$; $\frac{7}{4} \ldots 1$; $\frac{4}{5} \ldots \frac{8}{10}$.

2. Ábrázold a számegyenesen a következő számokat!

3; -1; $0{,}5$; $3{,}25$; $-\frac{1}{4}$; $-2\frac{1}{2}$; $-1{,}5$.



3. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $(+2)+(+1) = \ldots\ldots$;
$(-3)+(+4) = \ldots\ldots$;
$(-5)+(-2) = \ldots\ldots$;

b) $(+5)-(+8) = \ldots\ldots$;
$(-6)-(-1) = \ldots\ldots$;
$(+2)-(-4) = \ldots\ldots$;
$(-8)-(+5) = \ldots\ldots$;

c) $(+7)\cdot(+2) = \ldots\ldots$;
$(-3)\cdot(+1) = \ldots\ldots$;
$(-2)\cdot(-4) = \ldots\ldots$;

d) $(+8):(+2) = \ldots\ldots$;
$(-6):(+3) = \ldots\ldots$;
$(-4):(-2) = \ldots\ldots$;
$(+5):(-1) = \ldots\ldots$

4. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{3}{4}+\frac{4}{5} = \ldots\ldots$; $\quad \frac{2}{3}-\frac{1}{4} = \ldots\ldots$;

$3\frac{1}{2}-\frac{3}{4} = \ldots\ldots$; $\quad 0{,}3+0{,}028 = \ldots\ldots$;

$1{,}03-0{,}2 = \ldots\ldots$;

b) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6} = \ldots\ldots$; $\quad 1\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \ldots\ldots$;

$\frac{3}{4}:\frac{1}{5} = \ldots\ldots$; $\quad 3{,}2:0{,}16 = \ldots\ldots$

$3{,}86\cdot 2{,}5 = \ldots\ldots$;

5. Mennyi K értéke, ha $K = \dfrac{a+b-c}{a-b}\cdot d$

és $\quad a = -3{,}5$; $\quad b = +\frac{1}{2}$; $\quad c = -5$; $\quad d = 2{,}2$?

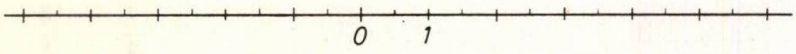
B. csoport

1. Írd az alábbi számpárok közé a megfelelő ($<$, $=$, $>$) jelet!

$-1 \ldots -4$; $-5 \ldots 0$; $2 \ldots -4$; $2{,}1 \ldots 2{,}08$; $\frac{3}{4} \ldots \frac{4}{5}$; $\frac{1}{2} \ldots 0{,}5$; $\frac{2}{7} \ldots 1$; $\frac{3}{7} \ldots \frac{6}{14}$.

2. Ábrázold a számegyenesen a következő számokat!

2; -2; $0{,}5$; $3{,}25$; -1; $\frac{1}{2}$; $-3\frac{1}{4}$.



3. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $(+3)+(+1) = \ldots\ldots$;
$(-2)+(-1) = \ldots\ldots$;
$(-4)+(+3) = \ldots\ldots$;

b) $(+2)-(+8) = \ldots\ldots$;
$(-4)-(-1) = \ldots\ldots$;
$(+3)-(-4) = \ldots\ldots$;
$(-6)-(+5) = \ldots\ldots$;

c) $(+7)\cdot(+3) = \ldots\ldots$;
$(-2)\cdot(+4) = \ldots\ldots$;
$(-5)\cdot(-2) = \ldots\ldots$;

d) $(+8):(+2) = \ldots\ldots$;
$(-10):(+5) = \ldots\ldots$;
$(+6):(-2) = \ldots\ldots$;
$(-12):(-4) = \ldots\ldots$

4. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4} = \ldots\ldots$;

$\frac{4}{5}-\frac{1}{4} = \ldots\ldots$;

$2\frac{2}{3}-\frac{3}{4} = \ldots\ldots$;

$0{,}5+0{,}015 = \ldots\ldots$;

$1{,}05-0{,}3 = \ldots\ldots$;

b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9} = \ldots\ldots$;

$2\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \ldots\ldots$;

$\frac{4}{5}:\frac{1}{3} = \ldots\ldots$;

$4{,}8:0{,}96 = \ldots\ldots$

$5{,}21\cdot 3{,}1 = \ldots\ldots$;

5. Mennyi N értéke, ha $N = \dfrac{(a+b)c-d}{a-b}$

és $a = -2{,}4$; $b = \frac{2}{5}$; $c = 3{,}3$; $d = -1$?

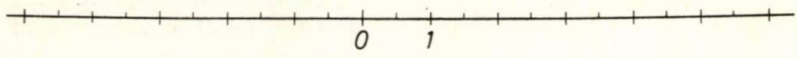
C. csoport

1. Írd az alábbi számpárok közé a megfelelő ($<$, $=$, $>$) jelet!

$-4 \ldots -3$; $1{,}5 \ldots 1{,}428$; $0 \ldots -6$; $1 \ldots -3$; $\frac{4}{5} \ldots \frac{6}{10}$; $\frac{3}{4} \ldots 0{,}25$; $\frac{8}{5} \ldots 1$; $\frac{6}{7} \ldots \frac{18}{21}$.

2. Ábrázold a számegyenesen a következő számokat!

$2;\ -1;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ 4{,}5;\ 3{,}25;\ -2.$



3. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $(-2)+(-1) = \ldots\ldots;$
$(+8)+(+3) = \ldots\ldots;$
$(-5)+(+1) = \ldots\ldots;$

b) $(-5)-(-2) = \ldots\ldots;$
$(-3)-(+1) = \ldots\ldots;$
$(+8)-(+4) = \ldots\ldots;$
$(+5)-(-3) = \ldots\ldots;$

c) $(-2)\cdot(+3) = \ldots\ldots;$
$(-8)\cdot(-5) = \ldots\ldots;$
$(+1)\cdot(+6) = \ldots\ldots;$

d) $(-5):(-1) = \ldots\ldots;$
$(+20):(+4) = \ldots\ldots;$
$(-12):(+6) = \ldots\ldots;$
$(+8):(-2) = \ldots\ldots$

4. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{20} = \ldots\ldots;$ $\quad \frac{4}{9}-\frac{2}{6} = \ldots\ldots;$

$5\frac{1}{2}-\frac{3}{4} = \ldots\ldots;$ $\quad 3{,}2+1{,}012 = \ldots\ldots;$

$2{,}1-0{,}84 = \ldots\ldots;$

b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9} = \ldots\ldots;$ $\quad 3\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \ldots\ldots;$

$\frac{2}{3}:\frac{4}{5} = \ldots\ldots;$ $\quad 9{,}6:0{,}24 = \ldots\ldots$

$5{,}24\cdot 3{,}1 = \ldots\ldots;$

5. Mennyi P értéke, ha $P = \frac{a-(b-c)}{c-b}\cdot d$

és $\quad a = -6; \quad b = 4{,}75; \quad c = \frac{3}{4}; \quad d = 3{,}28?$

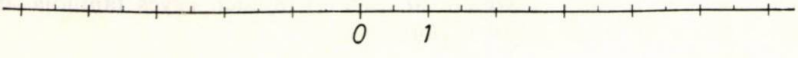
D. csoport

1. Írd az alábbi számpárok közé a megfelelő ($<$, $=$, $>$) jelet!

$-6\ldots-5;\ 2\ldots-3;\ -6\ldots0;\ 3{,}6\ldots3{,}58;\ \frac{2}{3}\ldots\frac{4}{5};\ \frac{1}{2}\ldots0{,}5;\ \frac{10}{9}\ldots1;\ \frac{3}{4}\ldots\frac{9}{12}.$

2. Ábrázold a számegyenesen a következő számokat!

$2{,}5;\ -4{,}75;\ \frac{1}{3};\ -1;\ 4;\ 2;\ \frac{1}{2}.$



3. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $(+3)+(-1) = \ldots\ldots$;
$(-4)+(-2) = \ldots\ldots$;
$(+5)+(+1) = \ldots\ldots$;

b) $(+4)-(+2) = \ldots\ldots$;
$(-5)-(-2) = \ldots\ldots$;
$(-3)-(+1) = \ldots\ldots$;
$(+9)-(-5) = \ldots\ldots$;

c) $(+2)\cdot(+4) = \ldots\ldots$;
$(-4)\cdot(+1) = \ldots\ldots$;
$(-4)\cdot(-3) = \ldots\ldots$;

d) $(+6):(+2) = \ldots\ldots$;
$(-8):(+2) = \ldots\ldots$;
$(-10):(-5) = \ldots\ldots$;
$(+7):(-1) = \ldots\ldots$

4. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{3}{7}+\frac{3}{14} = \ldots\ldots$;

$\frac{5}{8}-\frac{1}{3} = \ldots\ldots$;

$2{,}1-0{,}24 = \ldots\ldots$;

b) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7} = \ldots\ldots$;

$\frac{5}{6}:\frac{6}{7} = \ldots\ldots$;

$6{,}29\cdot 2{,}1 = \ldots\ldots$;

$5{,}6+5{,}013 = \ldots\ldots$;

$6\frac{1}{2}-\frac{3}{4} = \ldots\ldots$;

$2\frac{1}{4}:\frac{3}{5} = \ldots\ldots$;

$1{,}2:0{,}15 = \ldots\ldots$

5. Mennyi D értéke, ha $D = \dfrac{a(b-c)+d}{a+b}$

és $a = -0{,}5$; $b = 6{,}25$: $c = \frac{1}{4}$; $d = -2{,}75$?

Az első témakör feladataival a tanulók számolási készségét mértük. Mivel az egyes feladatok eredménye sok esetben csak egyetlen szám (ami könnyen lemásolható), ezért úgy gondoltuk, 4 változatot készítünk, hogy az egymás előtt ülők is különböző feladatokat kapjanak. Így kisebb a másik tanuló munkájáról való másolás lehetősége.

A felmérést a kb. 25 órás év eleji ismétlés befejezése után végeztük.

Az eredmények a következők voltak:

Feladatok	1.	2.	3/a.	3/b.	3/c.	3/d.	4/a.	4/b.	5	Összesen
Az egyes feladatokra elérhető pontszámok	8	7	3	4	3	4	6	4	5	44
Teljesímény %-ban	84,8	66	78,4	51,6	84,3	80,5	66,5	66,9	19,7	66,4

100%-nak vettük (itt is és a következőkben is) azt a pontszámot, amely úgy adódott volna, ha a 10—10 osztály (összesen 20 osztály) minden egyes tanulója az egyes feladatokra maximális pontszámot kapott volna.

BÉKEFI ZSUZSANNA
tanár
Lovassy László Gimnázium, Veszprém

Megjegyzések az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny II. fordulóján írt dolgozatokhoz

Az OKTV ez évi második fordulóján matematikából az általános tantervűek versenyén az alábbi feladatokat kellett megoldani:

1. Az ABC háromszögben a C csúcsnál kétszer akkora szög van, mint az A-nál. Milyen értékeket vehet fel az $\frac{AC}{AB}$ hányados?
2. Egy edényben egy liter bor, egy másikban egy liter víz van. Az első edényből átöntünk egy decilitert a másodikba, összekeverjük, majd a keverékből egy decilitert visszaöntünk az első edénybe. Számítsuk ki az első edényben levő bor mennyiségének határértékét, ha a fenti eljárást végtelen sokszor ismételjük! (Az egyes átöntések alkalmával tökéletes keveredést tételezünk fel, és az eljárás során nincs folyadékveszteség.)
3. Egy háromszög mindhárom oldalegyenesét érintő négy kör sugara egy mértani sorozat egymást követő négy eleme. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

A numerikus végeredmények egyezése miatt sok versenyző érezte úgy, hogy mind a három feladatot megoldotta, és bizakodva várta az eredményhirdetést. Közülük többen csalódva szemlélték a nyertesek névsorát, és nem biztos, hogy megnyugtató választ kerestek és találtak arra a kérdésre: vajon miért nem értékelte a versenybizottság az ő dolgozataikat. Miért nem volt jó a megoldásuk, ha jó volt mind a három feladat végeredménye? Ezeknek a versenyzőknek cikkünkben kívánunk válaszolni. Tudjuk, hogy ők nemigen fogják olvasni válaszunkat. Reméljük azonban, hogy tanáraik számára is hasznos felvillantani, milyen tanulságok fogalmazhatók meg a versenydolgozatok alapján. A hibás vagy hiányos megoldások olyan problémákat jeleznek, amelyeknek körüljárása — úgy véljük — nemcsak a versenyzők és felkészítő tanáraik számára fontos. A későbbi versenyek és a mindennapi matematikaoktatás szempontjából egyaránt hasznos lehet, ha megmutatjuk, mi az, amit nem tudnak, amit rosszul tudnak versenyzőink. Anélkül, hogy a feladatok megoldását közölnénk, szólni szeretnénk arról is, hogy a versenybizottság mely megoldásokat tekinti teljesnek.

Az *első feladat* megoldása az $f(\alpha)=2\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2\cdot\cos\alpha}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$ függvény értékkészletének megállapítására vezethető vissza. (Az ABC háromszög A csúcsánál levő szöget α-val jelöljük, felírjuk a keresett $\frac{AC}{AB}$ arányt sinustételből, majd az összegezési képleteket alkalmazzuk.)

Azt sok versenyző világosan látta, hogy az $f(\alpha)$ függvényt kell vizsgálnia, de hogy pontosan melyik tulajdonságát, azt már kevesen.

Monotonitás, szélsőérték, folytonosság és határérték — ezek a fogalmak a legtöbb dolgozatban megjelentek, de kevés versenyző volt tisztában azzal, hogy milyen összefüggés van és lehet e fogalmak közt; melyikből következtethet a másikra; ezeket a tulajdonságokat vizsgálva hogyan juthat el a feladatban szereplő közvetett függvény értékkészletéhez.

L. J. dolgozatából idézünk: „Megállapíthatjuk, hogy $0°<\alpha<60°$, hiszen más esetben nincs háromszög. Ebben az intervallumban a $2\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2\cdot\cos\alpha}$ kifejezés maximuma ott van, ahol $\alpha\to 0°$, hiszen ekkor $\cos\alpha$ maximális. Ekkor $2\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2\cdot\cos\alpha}\to\frac{3}{2}$; ha $\alpha\to 60°$, akkor $\cos\alpha\to\frac{1}{2}$ és $2\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2\cdot\cos\alpha}\to 0$. Így $0<\frac{b}{c}<\frac{3}{2}$." $\left(\frac{b}{c}=f(\alpha)\right)$ (L. J. gondolatmenete sok szempontból tipikus, nem tartjuk fontosnak nevének közlését.)

L. J. hibát hibára halmoz; próbáljuk meg megtalálni ezeknek a hibáknak az eredetét, okát!

A $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ nyílt intervallumban $f(\alpha)$-nak nincs maximuma. Zavarosak és hiányosak L. J. ismeretei a zárt és nyílt intervallumról, a lokális és abszolút maximumról, az alsó és felső határ fogalma helyett a legkisebb és a legnagyobb értékről beszél. L. J. hibás és hiányos gondolatmenetéből arra következtethetünk, hogy ő valójában az $f(\alpha)$ függvény $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ nyílt intervallumon vett értékeinek felső, illetve alsó határát számította ki, és tényként közölte, hogy a keresett értékkészlet az alsó és felső határ által meghatározott nyílt intervallum minden számértéke.

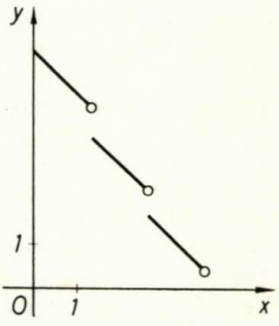
A felső, illetve az alsó határ L. J. szerint a $\lim\limits_{\alpha\to 0} f(\alpha)$, illetve $\lim\limits_{\alpha\to\pi/3} f(\alpha)$ számértékeivel egyenlő. L. J. gondolatmenetében $f(\alpha)$ maximumának (felső határának) kiszámolásakor $\cos\alpha$ maximumára (felső határára) hivatkozik. Következtetése természetesen helytelen, mert a közvetett függvény maximuma (felső határa) nemcsak a belső függvény maximumától (felső határától) függ. (Ha L. J.-nek igaza lenne a közvetett függvény maximumát illetően, akkor bármely $g(\cos\alpha)$ típusú függvénynek maximuma lenne $\cos\alpha=1$ esetén. Az $\frac{1}{\cos\alpha}$ vagy az $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\alpha}$ függvények megfelelő ellenpéldát adhatnak L. J. állításának cáfolatára.

Sok versenyző számította ki az alsó és felső határt L. J.-hez hasonlóan határértékkel, legfeljebb nem így indokolta ezt a lépést. A legtöbb esetben nem is adtak indoklást a versenyzők. A hibás vagy hiányos megoldásnak a hiányos fogalomalkotásban van a gyökere. Az alsó vagy felső határ számértéke a megfelelő határértékkel csak bizonyos esetekben számolható ki. (L. J. számolási eljárása csődöt mond pl. $x\cdot\sin x$ $\left(0<x<\frac{3}{2}\pi\right)$ függvény esetén, mert $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\sin x)$ ennek a függvénynek sem alsó, sem felső határa a $\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$ intervallumban.)

Azok a versenyzők, akik logikailag helyes úton jutottak el az alsó és felső határ kiszámolásához, az $f(\alpha)$ szigorúan monoton csökkenését bizonyították a $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ zárt intervallumon. A szigorúan monoton csökkenés igazolása változatos módon jelentkezett a dolgozatokban. Többen a $\cos\alpha$ és a $-\frac{1}{\cos\alpha}$ monotonitására hivatkoztak; voltak, akik a differenciálhányadost használták; találkoztunk grafikus megoldással is. A versenybizottság teljes értékűnek fogadta el a grafikus függvényvizsgálatot is, ha azt a versenyző megfelelően indokolta (például elemi függvényeket

használt a grafikus összegzéshez). Néhány versenyző a közvetett függvény szigorúan monoton csökkenésére mondott ki általános tételt, s azt kiemelkedő analízisbeli tudást és szemléletet tükröző módon be is bizonyította.

B. A. logikailag helyes úton jutott el az alsó és felső határ kiszámolásához. A $\cos(\alpha)$ függvény monotonitására hivatkozva kimutatta $f(\alpha)$-ról, hogy a $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ zárt intervallumon monoton csökken, és belátta, hogy $0<f(\alpha)<\frac{3}{2}$. Majd így fejezte be megoldását: „Mivel a $2\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2\cdot\cos\alpha}$ függvény a $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ intervallumon mindenhol értelmezve van és monoton csökkenő, ezért a 0 és $\frac{3}{2}$ között minden értéket felvehet." B. A. érzi, hogy az értékkészlet megállapítása nem fejeződhet be az alsó és felső határ kiszámolásával, hanem azt is meg kell nézni, vajon a szóba jöhető $f(\alpha)$ értékek mind megfelelők-e. B. A. azonban az értelmezési tartományt és a monotonitást elegendő feltételnek tartja, de nem gondol arra, hogy a monoton csökkenés például lépcsőzetesen is történhet. (Lásd a $-[x]$ függvényt!) A monoton csökkenés és a szigorúan monoton csökkenés fogalmakat is jó lenne pontosan tudni és használni. Természetesen itt a szigorúan monoton csökkenés sem lenne elegendő feltétel. (Lásd az ábrán megadott függvényt!)



Az idézett hibás következtetések taglalásakor szándékosan követjük az ellenpélda megadásának módszerét, mert úgy véljük, hogy a tanítási gyakorlatban ez a módszer ilyen esetekben hasznos lehet.

B. A. fogalmai között a monotonitás és a folytonosság egybekapcsolható tulajdonságok.

Meg kell jegyeznünk, hogy igen sok versenydolgozatban fejeződött be a megoldás az értékkészlet alsó és felső határának kiszámolásával. A versenybizottság az első feladat megoldását csak akkor tekintette hibátlannak, ha a versenyző azt is belátta, hogy $f(\alpha)$ a $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ nyílt intervallum minden értékét csakugyan felveszi. Az első harminc helyen végzett versenyző közül 14-en adtak az első feladatra hibátlan megoldást. Közülük legtöbben $f(\alpha)$ folytonosságára hivatkozva válaszoltak „a megfelelő $f(\alpha)$-hoz létezik megfelelő α" kérdésre. Akadt néhány versenyző, aki a $\lambda=2\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2\cdot\cos\alpha}$ trigonometrikus egyenlet megoldásával elemi úton mutatta ki, hogy megfelelő λ-hoz létezik megfelelő háromszög.

A teljes megoldáshoz természetesen nemcsak $f(\alpha)$ tulajdonságainak kimondása tartozott, hanem e tulajdonságok bebizonyítása is. (Például a folytonosság kérdése elintézhető a $2\cdot\cos\alpha$ és az $\frac{1}{2\cdot\cos\alpha}$ folytonosságára való hivatkozással, ha utalunk az összegfüggvény folytonosságára.)

A *második feladat* megoldása során igen sok versenyző állította, hogy a keresett határérték $\frac{1}{2}$, de kevesen tudták bebizonyítani állításukat megfelelő matematikai

modellt konstruálva. A versenybizottság az olyan megoldást tekintette teljesnek, amelyben a versenyző az n-edik lépés után keletkezett folyadék (pl. az első edényben levő bor) mennyiségét (pl. rekurzióval) megadta, képletének helyességét (pl. teljes indukcióval) bebizonyította, és a határértékképzést indokolva végezte el. Kiemelkedőnek tartotta a versenybizottság azt a dolgozatot, amelyben a versenyző (K. P.) azt bizonyította be, hogy a két edényben levő bor különbsége olyan mértani sorozat, amelyre $|q|<1$.

Érdekes megfigyelést tartalmazott V. T. dolgozata. V. T. azt mutatta meg, hogy ha az át- és visszaöntés kettős lépését kettéválasztjuk, akkor az áttöltés utáni határérték $\frac{9}{20}$ a visszaöntés utáni $\frac{1}{2}$ határértékkel szemben.

A sorozat határértékével kapcsolatos hiányos ismeretek, zavaros fogalomalkotások sok versenyző dolgozatában megjelentek. Lássunk most ezekre a hibákra két tipikus példát!

M. A. dolgozatából idézünk: „Legyen az n-edik töltögetés után x_n liter bor az első edényben! Keressük meg x_{n+1}-et! Ha találunk köztük összefüggést, akkor célhoz érünk, hiszen ha $n\to\infty$, $x_n=x_{n+1}$, ennek alapján x_∞-t kiszámíthatjuk." M. A. pontatlanul gondolkodik és ír. x_∞-nel a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$-t jelöli, és az $x_n=x_{n+1}$ egyenlősége valójában a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$ egyenlőséget jelenti. A pontatlan megfogalmazás mellett M. A. arról is megfeledkezik, hogy a határérték kiszámolásának általa követett módja csakis akkor alkalmazható, ha a határérték létezik, vagyis a sorozat konvergenciáját már előzőleg beláttuk valamilyen módon. Az ún. határátmeneti tételeket sok versenyző nagyvonalúan használta s megfeledkezett annak körültekintő megvizsgálásáról, hogy ezek a tételek használhatók-e. A „ha A, akkor B" típusú állítások a hiányos és pontatlan ismeretek miatt igen gyakran „mindig igaz B" típusú állításokká torzulnak.

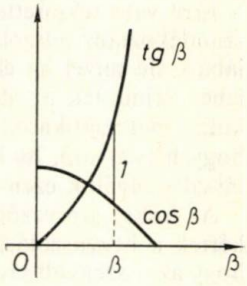
Több dolgozatban fordult elő H. G. gondolatmenetéhez hasonló: „A végtelen sok áttöltés határértékének azt a helyzetet vehetnénk, amelyen egy következő áttöltés már nem változtat." Vagyis H. G. megkeresi azt az „egyensúlyi helyzetet", amelyen a feladatban szereplő áttöltések egymás utáni alkalmazása már nem módosít („ezt az áttöltést a helyzet megváltoztatása nélkül is végtelen sokszor végezhetjük el"), és az „egyensúlyi helyzetet" határértéknek nevezi. H. G.-nek nincsenek tiszta fogalmai a sorozat határértékéről, nem törekszik a határérték-fogalom matematikai megközelítésére, az egzaktságra. Ha összevetjük M. A. felszínes ismereteivel H. G. elképzeléseit, akkor láthatjuk, hogy gondolkodásuk és tudásuk egyaránt hiányos, s mindkettőjük ott hibázza el alapjaiban a megoldást, hogy a konvergencia létezésének kérdését fel sem veti. (M. A. fogalmai, ismeretei sem tekinthetők egzaktabbnak attól, hogy használ bizonyos formulákat.)

A *harmadik feladatra* lényegében három típusú megoldást adtak a versenyzők. Vagy trigonometrikus összefüggésekkel jutottak például a $\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=1$ egyenlethez, vagy a félkerület és a körök sugarainak megfelelő arányát használva Pitagorasz tételének megfordításával kaptak megfelelő eredményt, vagy pedig az előbb említett arányokat felhasználva hasonlóság alkalmazásával bizonyították a legnagyobb szögről, hogy 90°. A versenybizottság a megoldás hiányosságának tekintette, ha a versenyző csak használta, de nem indokolta, hogy a négy sugár közül a legkisebb a beírt kör sugara; hogy a ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c nagyság szerint úgy követik egymást, mint az a, b és c oldalak. A megoldást nem tekintette teljesnek abban az esetben sem, ha az

algebrai lépéseknél szükség lett volna ekvivalencia-kérdések tisztázására, de a versenyző ezt elmulasztotta.

Több versenyző használt e feladat megoldásához zsebszámológépet. Cs. Z. dolgozatában q-val jelöli a szóban forgó mértani sorozat hányadosát. Az oldalak, a félkerület és a sugarak összefüggését használva harmadfokú egyenletet kap. Idézünk dolgozatából: „$q^3+q^2+q-1=0$, $q>0$ és $q<1$. Ebből q meghatározható: $q\approx 0{,}543\,685\,8$, más valós gyök nincs." (A kiszámolás módjának leírásával Cs. Z. adós maradt.) q ismeretében kifejezi a háromszög oldalait: a; $b\approx 1{,}543\,685\,8a$; $c\approx 1{,}839\,251\,6a$; és cosinustétel alkalmazásával azt kapja, hogy „$\cos\gamma=3{,}8673\cdot 10^{-5}$; $\gamma=90°$, tehát a háromszög legnagyobb szöge 90°. Ellenőrzéssel győződhetünk meg arról, hogy ez a szög valóban kielégíti a feltételeket." Cs. Z. nem szól arról, hogyan képzeli a közelítő gyök ellenőrzését, egyáltalán milyen kérdést akar az ellenőrzéssel eldönteni. Cs. Z. idézett megoldása figyelmeztethet bennünket arra, hogy a tanítás során tisztázni kell a közelítő eljárások érvényességének körét, a közelítő gyökök „ellenőrzésének" kérdését, valamint a zsebszámológép használatának módszerét is. Cs. Z.-nek röviden utalni kellett volna arra, hogyan kapta q értékét, miből jutott arra az eredményre, hogy más valós gyök nincs. Cs. Z. megoldását a versenybizottság nem fogadta el.

A harmadik feladat teljes megoldásához nem kívánta meg a versenybizottság sem annak igazolását, hogy a feladatban szereplő háromszög létezik; sem annak bebizonyítását, hogy a feladat feltételei a megfelelő háromszög szögeit egyértelműen meghatározzák. Voltak azonban versenyzők, akik a megfelelő tulajdonságú háromszög létezésének és egyértelműségének kérdését is vizsgálták. Befejezésül idézzük ezzel kapcsolatban M. A. gondolatmenetét. Azt, hogy a háromszög legnagyobb szöge derékszög, M. A. Pitagorasz tételének megfordításából kapta annak felhasználásával, hogy ha ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c egy mértani sorozat szomszédos elemei, akkor s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ is azok. Ez utóbbi mértani sorozat tulajdonságait felhasználva a háromszög γ és β szögeire a következőket kapta: $\gamma=90°$ és $\cos\beta=\operatorname{tg}\beta-1$. A β-ra vonatkozó egyenlet megoldhatóságát így indokolta: „A függvénytáblázat alapján $\beta\approx 57°$, tehát létezik ilyen háromszög. Valahol biztosan van olyan szög (0° és 90° között), hogy $\cos\beta=\operatorname{tg}\beta-1$." (Az ábra is az idézethez tartozik.) Az olvasóra bízzuk annak végiggondolását, hogyan lehetne M. A. gondolatmenete alapján pontos bizonyítást adni nemcsak a kérdéses β szög létezésére, hanem arra is, hogy csak egyetlen ilyen β szög van.



HÓDI ENDRE
osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet

Egy hozzászólás

A Bolyai János Matematikai Társulat Felsőoktatási Bizottsága a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat Budapesti Szervezetének Matematikai Szakosztályával együttműködve f. évi június hó 6-án egynapos ankétot rendezett a matematika egyetemi és főiskolai oktatásáról a Kossuth Klubban.

Az ankéton elsősorban műszaki, közgazdasági, agrár stb. jellegű egyetemek, főiskolák matematikaoktatásával kapcsolatos problémák kerültek megvitatásra. A fő cél az volt, hogy a résztvevők az olyan egyetemeken, főiskolákon folyó matematikaoktatás aktuális módszertani — főként nem tematikai — kérdéseit vitassák meg, ahol a matematika más tudományok igényeinek kielégítését szolgálja.

Erre való tekintettel eredetileg nem is szándékoztam felszólalni az ankét vitájában, de mivel az előttem szólók több ízben érintették az általános és középiskolai matematikaoktatást, úgy véltem, hogy helyénvaló, ha bizonyos tájékoztatással szolgálok ezen a területen.

Az ankét szervezői később írásban is kérték a hozzászólások rövid tartalmát, hogy az összegyűlt javaslatokat továbbítsák a megfelelő fórumokhoz.

Az alábbiakban A Matematika Tanítása útján is nyilvánosságra hozom felszólalásom írásos változatát abban a reményben, hogy az érdekelni fogja e folyóirat szélesebb olvasótáborát is.

1. Az általános iskolában az 1978—79. tanévvel, a szakmunkásképző iskolákban az 1975—76., majd az 1977—78. tanévvel, a szakmunkásképzést folytató szakközépiskolákban az 1978—79. tanévvel kezdődően vezettek be új tanterveket felmenő rendszerrel matematikából is. A még nem említett két középiskola-típusban: a középfokú képzést folytató szakközépiskolákban és a gimnáziumban pedig az 1979—80. tanévtől kezdve térnek rá új tantervek alkalmazására ugyancsak felmenő rendszer szerint. Röviden ezzel lehetne összefoglalni az 1972. évi oktatáspolitikai párthatározatban előírt középtávú oktatási reformok életbeléptetésének időrendjét — nem említve néhány apróbb kivételt, amelyek azonban nincsenek befolyással a lényegre.

Az új tanterveket az Oktatási Minisztérium rendelkezésének értelmében az Országos Pedagógiai Intézet megfelelő tanszékei, illetőleg — az Intézet 1976. évi átszervezését követően — osztályai dolgozták ki, külső szakemberek szükség szerinti bevonásával és az adott lehetőségekhez képest szűkebb vagy tágabb körű szakmai s társadalmi bírálatot is figyelembe véve.

A továbbiakban már csak a matematika-tantervekre korlátozódva, az egyes iskolatípusok új tanterveit meglehetősen különböző feltételekkel kellett kimunkálniuk az OPI Matematikai Nevelési Osztálya illetékes munkatársainak, mert amíg például az általános iskolában több, mint tízéves kísérleti periódus előzte meg egy, a korábbihoz képest lényegesen korszerűbbnek minősíthető tanterv — ráadásul fokozatos — bevezetését, a közép-, illetve középfokú iskolák esetében nem voltak ilyen kedvezők a körülmények: egyrészt hosszabb kísérletek tapasztalatai sem álltak rendelkezésre (bár bizonyos kísérleti eredményekre azért ezeken a területeken is támaszkodhattunk), másrészt az általános és középiskolai tantervek közel egyidejű bevezetése miatt ez utóbbiak kialakításakor természetesen még nem lehetett építeni a korszerű új, hanem csak a régi általános iskolai matematika-tantervre. Ennek szükségszerű folyománya, hogy a középiskolai

matematika-tantervek lényegesen mérsékeltebb korszerűsítést irányozhattak csak elő, mint az általános iskolai.

Egyes bírálók szóvá is tették ezt az „ellentmondást", holott az előbbiek megvilágításában nyilvánvaló, hogy esetünkben nem áll fenn ellentmondás. Arra azonban gondolnunk kell — és gondolunk is —, hogy amikor az általános iskolát olyan gyermekek hagyják el, akiknek túlnyomó többsége már az ún. átmeneti, majd az új tanterv szerint tanulta a matematikát — ez az 1981—82., illetve az 1985—86. tanévet megelőzően esedékes —, akkor bizonyos módosításokat eszközöljünk a középiskolai matematikatanterveken, teret adva azok jelenleginél nagyobb mértékű korszerűsítésének. Ahogyan ma megítélhető, az első módosítás viszonylag kisebb, míg a második minden valószínűség szerint nagyobb jelentőségű lesz, és a tantervi módosításoknak a csatlakozó, főleg írásos dokumentumokra vonatkozó hatásával is számolni kell.

2. Más ok miatt is sor kerülhet az általános és középiskolai új matematikatantervek módosítására, átdolgozására a következő néhány év folyamán, mint amiről eddig beszéltem. Ez az ok pedig a zsebszámológépek várható bevezetése az említett iskolatípusokba.

Mint ismeretes, jelenleg az a helyzet, hogy egyes tanárok egyrészt maguk is használnak különféle teljesítményű zsebszámológépeket, másrészt megengedik, hogy azok a tanítványaik, akiknek van saját zsebszámolójuk, használhassák azt a matematikaórákon és házi feladatok megoldásában. Mivel azonban anyagiak hiányában nem biztosítható minden tanuló zsebszámológéppel való ellátása egyik iskolatípusban sem, ami azt jelenti, hogy e tekintetben jelenleg még nem tudunk egyenlő esélyt biztosítani minden egyes tanuló számára, ezért az érdemjegyet, illetőleg osztályzatot adó feladatok (írásbeli dolgozatok, érettségi, valamint közös érettségi-felvételi vizsgák tételei) kidolgozásakor nincs megengedve a zsebszámológépek használata. Az egyenlő esélyek biztosítása szocialista oktatáspolitikánk egyik sarkalatos alapelve.

Ugyanakkor figyelembe véve, hogy külföldön ma már egyre több országban megoldották ezt a problémát, véleményem szerint a zsebszámológépeknek az iskolai, elsősorban matematikaoktatásba történő bevezetésével mi sem várhatunk sokáig. Ezt a véleményemet alátámasztják részben azok a kísérletek, amelyeket ebben az irányban folytatnak nemcsak hazánkban, hanem más szocialista országokban is, részben a TANÉRT (Országos Tanszergyártó és Értékesítő Vállalat) idevágó és a közeli jövőre vonatkozó fejlesztési tervei, de más jelenségeket, törekvéseket is lehetne még említeni. Az viszont eléggé nyilvánvaló, hogy az egyes iskolatípusok igényeit kielégítő zsebszámológépek általános bevezetésének együtt kell járnia a megfelelő matematika-tantervek (esetleg más tantárgyak tanterveinek is) felülvizsgálatával, netán módosításával, továbbá hogy a zsebszámológépek bevezetése nem történhetik meg a szükséges módszertani útmutatások megadása nélkül, amint azt legutóbb a Kvant című szovjet folyóiratban is olvashattuk. Tehát a zsebszámolóknak az iskolai oktatásba való általános bevezetésekor is időszerűvé válhatik a nemrég bevezetett vagy a közeljövőben bevezetendő matematika-tantervek átdolgozása anélkül, hogy ez új tantervek életbeléptetését jelentené. A következő — esetleg a jelenlegi iskolarendszerünk szerkezetének mélyrehatóbb átalakítását is magában foglaló — általános tantervi reform végrehajtásának kezdetét a nyolcvanas évek végére, a kilencvenes évek elejére tehetjük.

Teljesség kedvéért megemlítem, hogy merészebb tervek is vannak a számítástechnikának középiskolai bevezetését illetően. Néhány nappal ezelőtt alkalmam volt részt venni az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság által szervezett tervtanulmányi vitán és a hozzá csatlakozó

szakmai bemutatón, ahol többek között arra is javaslatot tettek, hogy három (!) éven belül minden közép- és középfokú iskolát ellátnak Magyarországon meghatározott specifikációjú minikomputerrel, amely lényegében azonos teljesítményű a jelenleg leggyakrabban használt elektronikus számítógépekkel. A közölt irányár ismeretében hozzávetőleges becslést végeztem, ennek alapján kételyeim vannak, hogy ez a terv csakugyan realizálódhatik három év alatt — mindenekelőtt anyagi okok miatt. Tény azonban, hogy a számítástechnikában a szédületes iramú fejlődés igen nehézzé teszi a megbízható előrejelzést, szinte — mondhatni — minden lehetséges. Ettől függetlenül, amit előzőleg mondtam a zsebszámológépekről, azt a közeljövőben ténylegesen bekövetkezőnek, illetve megvalósulónak tartom.

3. Egyik előttem felszólaló egyértelműen elmarasztalta a középiskolai matematikaoktatást. Az ilyesmi mindig merész általánosítás, de legtöbbször megalapozatlan is; az adott esetben sem volna nehéz megcáfolni azt megfelelő ellenpéldákkal. Most nem kívánok felsorolni ilyen ellenpéldákat, csak azt említem meg, hogy napi munkánk során sokszor találkozunk hasonló megnyilatkozásokkal.

A kép, amely e tekintetben kialakul, röviden a következőképpen jellemezhető: a felső tagozatos matematikatanár elmarasztalja az alsó tagozatos tanítókat, jobban mondva tanítónőket — mert férfi nevelőt csak elvétve lehet már találni az alsó tagozaton — mondván, hogy csak eljátszogatták az időt az alsó tagozat négy esztendeje alatt, és a tanulók zöme nagyon hiányos alaptudással, alapvető készségekkel s képességekkel került a felső tagozatba. A közép- és középfokú iskolák matematikatanárai — különösen a szakmunkásképző iskolákéi — szidják az általános iskolaiakat, mert hogy kellő alap nélkül küldték tanítványaikat a középiskolába. Ezután következik az egyetem és a főiskola a maga hasonló jellegű megállapításával, amelyről már szóltam ennek a pontnak bevezető soraiban.

De hogy teljes legyen a kép és bezáródjék a kör, hadd fűzzem hozzá az előbbiekhez még ezt is: Amikor aziránt érdeklődünk az alsó és középfokú oktatási intézmények vezetőitől, mivel magyarázzák tanítóik, tanáraik meglehetősen csekély hatékonyságú nevelői tevékenységét, azt szokták válaszolni rendszerint, hogy ilyen képességű nevelőket bocsátanak ki a képzőintézetek, az egyetemek; nekik ezekkel kell végrehajtani az előírt nevelési és oktatási feladatokat. Ha majd ez utóbbi intézmények jobban képzett nevelőket bocsátanak ki, akkor majd eredményesebb lesz az alsó és középfokú oktatási intézmények munkája is.

A kör tehát bezárult, és véleményem szerint addig nem is lehet kilépni ebből a bűvös körből, amíg a benne levők kizárólag az előttük állók ócsárolásával akarják elérni azt ahelyett, hogy a reális adottságok és feltételek gondos mérlegelése után a saját portájukon csinálnának rendet.

Ezzel a kérdéssel összefüggésben azért meg kell még mondanom, hogy az 1973-ban végrehajtott tananyagcsökkentés, valamint néhány más, hasonló jellegű intézkedés következményeként csakugyan tapasztalható volt bizonyos lazulás, sőt színvonalcsökkenés, különösen a középiskolákban. Az új tantervek bevezetése remélhetőleg e folyamat ellenében hat, és bízzunk abban, hogy egy-két éven belül kézzelfoghatóan tapasztalni fogjuk a kedvező változást!

4. Az egyik középiskolával, mégpedig a gimnáziummal külön is szeretnék foglalkozni, mert úgy tűnik, hogy a közvélemény tekintélyes része ma is szinte azonosítja a középiskola fogalmát a gimnáziuméval, holott az általános iskolából továbbtanulóknak viszonylag legkisebb hányada — ebben az esztendőben kb. csak 20%-a — megy gimnáziumba.

Ezenkívül van még egy jelentékeny momentum, amit feltétlenül tekintetbe kell vennünk a gimnáziumból ma ki-

kerülő tanulók tudásszintjének helyes megítélésekor. Legtöbben, akik közel egy emberöltővel ezelőtt végezték el az akkor még nyolcosztályos gimnáziumot, akaratlanul is azt a gimnáziumot tartják „a gimnázium" modelljének, azt keresik a ma gimnáziumában és azt várják el tőle. Holott a — mondjuk — 35—40 évvel korábbi gimnázium elitiskola volt; országos viszonylatban kevesebben látogatták, mint ahányan napjainkban az egyetemek és főiskolák nappali tagozatait. Másrészt: akkoriban sok helyen pl. egy matematikatanárnak annál nagyobb volt a tekintélye, minél szigorúbb volt, minél többet követelt (esetleg csak követelt, de maga édeskeveset nyújtott tanítványainak), netán minél többet buktatott. Nos, úgy vélem, nem kell bővebben ecseteltem az Igen tisztelt Jelenlevőknek, hogy ma nemhogy tekintélyt nem lehet szerezni hasonló eszközökkel, de egyáltalán megmaradni sem a gimnáziumi tanári pályán.

Továbbá: a mai gimnáziumnak hivatalosan is két (nem kettős, mert arról kiderült, hogy — egyes kivételektől eltekintve — nem oldható meg) funkciója van: előkészíteni tanulóinak egy részét, hogy alkalmasakká váljanak felsőfokú tanulmányok végzésére, ugyanakkor olyan felkészítést adni a tanulók másik részének, amely megkönnyíti számukra a munkába állást, a gyakorlati életbe való beilleszkedést. A legutóbbi években kb. 40% volt a továbbtanulók aránya a gimnáziumot végzettek között, ami azt jelenti, hogy a gimnázium növendékeinek zöme nem folytatja tanulmányait felsőfokú tanintézetben (egy részük esetleg évek múlva az érettségi bizonyítvány megszerzése után). Ezért érthető, hogy a gimnáziumból ma kikerülők tudásszintje nemcsak matematikából, hanem minden tantárgyból általában szélesebb skálán szóródik, mint 35—40 évvel ezelőtt. (Az előbbiekben nem is tértem ki valamennyi okra, amely ezt eredményezi.) Mivel pedig egyes főiskolákra, ritkábban egyetemekre is kevesebben jelentkeznek felvételre, mint a rendelkezésre álló keretszám, könnyen előfordulhat, hogy arra nem méltók is továbbtanulási lehetőséghez jutnak. Helytelen lenne azonban az ő hiányos tudásszintjük alapján általános véleményt alkotni a középiskolák, közöttük a gimnázium oktatásának, speciálisan matematikaoktatásának alacsony színvonaláról.

5. Még egy kérdés van, amelyet érinteni szeretnék felszólalásomban; ez pedig a jelölések kérdése, ami már az előbbiek során is többször előkerült. Szeretném mindjárt azt is előrebocsátani, hogy magam is híve vagyok a korszerű jelölések alkalmazásának. Úgy gondolom azonban, hogy az e kérdés körül folyó vitát előbbre vinné, ha a korszerűsítés hívei írásban részletesen kifejtenék meggyőző érveiket az új jelölésrendszer előnyeiről: miért jobb az, mint az előző volt; mennyivel kifejezőbb; milyen félreértési lehetőségeket küszöböl ki; tudja-e mindazt, amit a régi jelölésrendszer tudott; nem keletkeznek-e újabb félreértési lehetőségek az új jelölések használata során stb.?

A korszerű jelölések elterjedését véleményem szerint nagymértékben megkönnyítenék és meggyorsítanák az idevágó új szabványok. Nem először hangsúlyozom ezt, bár tudom, hogy a jelenlevők nem mindegyike ért egyet ezzel. Én azonban úgy gondolom, hogy a megfelelő országos szabványok alkalmazása nemcsak az iparban és a kereskedelemben hasznos és előnyös, hanem az oktatás területén is. Azt természetesen készséggel elismerem, hogy ez utóbbin más a szabványok súlya, mint az előtte említetteken. Az adott körülmények között minden eszközt megragadandónak tartok, hogy a kellően átgondolt és kidolgozott új jelölésrendszert minél előbb és minél szélesebb körben általánosan elterjesszük. Ha nem tesszük ezt, akkor nem csupán a jámbor szándéknál maradunk meg, hanem nemkívánatos kettősség is előállhat alapvető matematikai jelölések alkalmazásában: másképpen fogják je-

lölni ugyanazt a fogalmat a „tiszta", mint az „alkalmazott" matematikusok (a műszaki és természettudományok, a közgazdaságtudomány művelői), ami teljes meg nem értéshez vezethet a két tábor szakemberei között. Úgy gondolom, hogy ezt mindenki szeretné elkerülni. De ezenkívül adósak vagyunk még annak a kérdésnek megválaszolásával is, hogy miért kívánjuk újakkal felváltani azokat a korábbi jelöléseket, amelyekkel pedig az előző századok matematikusai olyan sok nagyszerű eredményt értek el kedvelt tudományunkban.

A magam részéről készségesen biztosítok helyet az általam szerkesztett módszertani folyóiratban: A Matematika Tanításában olyan közlemények számára, amelyek alkalmasak a korszerű jelölésrendszer meggyőző népszerűsítésére és általános elterjesztésének előmozdítására.

Mit ír a Kvant a zsebszámológépek iskolai használatáról?

A Szovjetunió Tudományos Akadémiájának és Pedagógiai Tudományos Akadémiájának népszerű tudományos fizikai—matematikai folyóirata ez évi 5. számában a „Kérdezzen! — Felelünk" rovatban közli *V. Ananyev* (Volgográdi terület) és mások következő kérdéseit:

Használhatnak-e a tanulók zsebszámológépeket a tanítási órákon? Megengedett-e a zsebszámológépek használata vizsgák alkalmával?

A kérdésekre ugyanott *Z. Mojszejeva,* a Szovjetunió Oktatási Minisztériuma iskolai főigazgatóságának felügyelője így válaszol:

A kisméretű elektronikus számológépek megjelenése tény és való. A zsebszámológépek (mikrokalkulátorok, mikrokomputerek) mindjobban elterjednek a népgazdaságban. Az iskolába való bevezetésük már a holnap feladata.

Ismeretes, hogy jelenleg a tanulók rengeteg időt fecsérelnek el különféle numerikus számolási készségek kifejlesztésével. Az elektronikus zsebszámológépek iskolai bevezetése felszabadítja ennek az időnek egy részét. Természetesen felvetődik annak szükségessége, hogy meghatározzuk azoknak a kérdéseknek a körét, amelyeket ezzel kapcsolatban kiegészítésül lehet megtanulniuk a diákoknak. Elsősorban az alsóbb osztályok tananyagának tartalmát fontos megállapítani. Már most is folynak kísérletek zsebszámológépek iskolai használatára vonatkozólag. Nevezetesen a jövő évben néhány jereváni iskolában megindul annak vizsgálata, hogy miképpen vezethetők be a zsebszámológépek a tanítási folyamatba az 1. osztálytól kezdve.

Nyilvánvaló, hogy tíz év múlva az emberek már nem fognak összeadni számoszlopokat, sőt a logarléc is a múlté lesz akkor. De ha a zsebszámológépek tömeges iskolai bevezetése a velük végzendő munka módszertanának előzetes átgondolása, a gyakorlatok pontosan meghatározott rendszerének kidolgozása nélkül történik, akkor az könnyen a tanulók számok iránti érzékének elvesztését eredményezheti. Mentesítésük a szóbeli számolás szükségessége alól odavezet, hogy elfelejtik a számok szorzó- és összeadó-táblázatát és attól is elszoknak, hogy legalább a legegyszerűbb szóbeli számolásokat végezzék el, nem tudják felbecsülni a kapott számítási eredményeket még nagyságrendileg sem. Külföldi iskolák tapasztalatai arra intenek bennünket, hogy óvakodjunk hasonló hiba elkövetésétől.

Ha azonban egy tanuló értelmes módon tudja használni a zsebszámológépet, képes az eredmény nagyságrendjének becslésére, akkor nem lenne célszerű eltiltani őt a technika vívmányának igénybevételétől. Különösen hasznos az elektronikus zseb-

számológépek alkalmazása geometriaórákon például háromszögek ismeretlen adatainak kiszámításakor, lehetséges felhasználásuk fizika- és kémiaórákon is a laboratóriumi és gyakorlati munkák végzése során adódó feladatok megoldásában, főként különféle numerikus számítási feladatokéban.

Magától értetődik, hogy ha egy tanuló a tanév folyamán számításainak elvégzéséhez elektronikus zsebszámológépet használt, akkor nem lenne ésszerű megfosztani őt ettől a lehetőségtől a vizsgákon sem.

Fordította: *Hódi Endre*

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
főiskolai tanár
Budapest

Matematikus Vándorgyűlés Nyíregyházán

A Bolyai János Matematikai Társulat a RÁTZ LÁSZLÓ Vándorgyűlést (az idén tizenkilencedszer) 1979. július 4. és 7. között rendezte meg Nyíregyházán. A házigazda a BJMT Szabolcs megyei Tagozata és a Bessenyei György Tanárképző Főiskola volt. A vándorgyűlésen több mint 450 tanító, matematika szakos általános iskolai, illetve középiskolai tanár, főiskolai és egyetemi oktató vett részt.

Az ünnepélyes megnyitón a BJMT Szabolcs megyei Tagozata nevében *dr. Lippa András* elnök, a Bessenyei György Tanárképző Főiskola nevében *dr. Papp József* főigazgató-helyettes, az MTESZ nevében *Scholtz Béla* titkár köszöntötte a résztvevőket, majd *dr. Surányi János,* a BJMT elnöke átadta a matematika tanítása és népszerűsítése érdekében kifejtett kiváló munkáért a *Beke Manó Emlékdíjakat.*

Beke Manó Emlékdíjban részesült 1979-ben:

Boroska Miklós, a Bessenyei György Tanárképző Főiskola 2. számú Gyakorló Iskolájának munkaközösség-vezető matematika szakvezető tanára;

Meződy Jánosné, nyugdíjas tanítóképző intézeti tanár;

Némethy Katalin, a budapesti Móricz Zsigmond Gimnázium tanára;

Pogáts Ferenc, a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola budapesti tagozatának adjunktusa;

Salamon Éva, a mosonmagyaróvári Széchenyi István Általános Iskola tanára;

Schmidt Eleonóra, a budapesti Kulich Gyula Ruhaipari Szakközépiskola tanára;

Vidéki Gusztávné, a budapesti Budai Nagy Antal Gimnázium tanára.

Az ünnepélyt követő plenáris ülésen **dr. Császár Ákos** akadémikus a Baire-féle kategóriatételről és **dr. Varga Tamás** főmunkatárs Számolás fejben, írásban, géppel című előadása hangzott el.

Délután bemutatásra került a *Búvó örökség* című, a megyét bemutató film és néhány *oktatófilm.*

Este a sóstói Krúdy Étteremben (szakítva a hagyományos búcsúesttel) ismerkedési esten vettek részt a vándorgyűlés résztvevői.

A következő három napon délelőttönként három szekcióban folyt a munka.

Az ALSÓ TAGOZATI SZEKCIÓBAN a következő előadásokat tartották:

C. Neményi Eszter: *Nyitott mondatok az 1—4. osztályban.*

Halmos Istvánné: *Ismerkedés a számokkal.*

Dr. Ill Mártonné: *A felfedeztető matematikaoktatás lehetőségeinek vizsgálata a 6—10 éves tanulók matematikaóráin.*

Minden délelőtt egy-egy óra *Műhelytitkok* címmel hasznos tapasztalatok megbeszélésével telt el.

A FELSŐ TAGOZATI SZEKCIÓ a következő előadásokat hallgatta meg:

Dr. Hetyei Gábor: *Geometriatanításunk problémái* (két részben).

Dr. Szalay Mihály: *Felsőbb algebra az általános iskolai oktatásban.*

Czeglédy István—Hajdú Sándor: *Korszerűt korszerűen.*

Novák Lászlóné az 5. osztályos új tankönyvről és munkalapokról *ankétot* vezetett.

A KÖZÉPISKOLAI SZEKCIÓBAN az alábbi előadások hangzottak el:

Dr. Elekes György: *Kombinatorikus geometria.*

Dr. Erdős Pál: *Néhány számelméleti probléma.*

Dr. T. Sós Vera: *Analízis a középiskolában* (két részben).

Gábos Adél: *Témák összehangolása a gimnáziumban.*

Dr. Hollai Márta: *Egybevágósági transzformációk tárgyalása fixelemek segítségével* (két részben).

Bakó Zsuzsa: *A szakközépiskolai III. osztályos matematika tankönyvről.*

Újvári István: *Matematikai nevelés egy szakközépiskolában.*

Az utolsó három előadás közül az első elsősorban a gimnáziumi, a két utolsó pedig a szakközépiskolai oktatásban érdekelteknek szólt.

Július 5-én a vándorgyűlés vendégei klubesten vehettek részt, amelyet *Adjunk tanácsot, tanítsunk módszert!* címmel **Rábai Imre** vezetett.

A vándorgyűlés résztvevői az idén két *kirándulás* közül választhattak: Az egyik társaság Nyírbátor nevezetességeit tekintette meg, a másik társaság a Nyíregyháza—Mátészalka—Fehérgyarmat—Túristvándi—Szatmárcseke—Tiszacsécse—Tiszabecs—Mátészalka—Nyíregyháza útvonalon haladva Szabolcs történelmi és irodalmi vonatkozású nevezetességeivel ismerkedett.

Új színfoltot jelentett a vándorgyűlésen annak a *feladatmegoldó versenynek* a megindítása, amelyet a matematikatanárok önálló szakmai munkájának kibontakoztatására hirdetett meg a BJMT. Az idei téma: Kombinatorikus geometria. A bevezető cikkek dr. Elekes György tollából A Matematika Tanítása 2. és 3. számában jelentek meg, ezeket egészítette ki a szerző előadása. A 8 versenyfeladat szövegét pedig a helyszínen kapták meg az érdeklődők. (A feladatok beszerezhetők a BJMT helyi tagozataiban vagy a budapesti központban. A megoldások beküldési határideje 1979. október 1.)

Egy szabad délután lehetőséget nyújtott termékeny eszmecserékre, vitákra. A vándorgyűlés alkalmából jelent meg a *Hírharang* harmadik száma, amelyben az idén is sok hasznos információ, tudósítás, feladat és tréfa kapott helyet.

Az 1980. évi 20. vándorgyűlést előreláthatólag Salgótarjánban rendezik meg.

Közlemény a 4. Nemzetközi Matematikai Kongresszusról

A 4. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszust a Nemzetközi Matematikaoktatási Bizottság Berkeleyben, az Amerikai Egyesült Államok California államában rendezi meg 1980. augusztus 10-től 16-ig. A vendéglátó intézmények az USA Országos Tudományos Akadémiája és a Berkeley-i Californiai Egyetem lesznek.

A Kongresszus alkalmat ad a résztvevőknek, hogy betekintést nyerjenek a legfrissebb eredményekbe és a fejlődésbe a matematika tanításának minden szintjén. A hivatalos programon és kiállításokon, a számos szervezett és spontán találkozón kívül lehetőségük lesz a résztvevőknek arra is, hogy személyes kapcsolatok révén tájékozódjanak.

A hivatalos nyelvek: angol, francia és spanyol. Minden plenáris ülésen, továbbá az egy időben folyó szekcióüléseknek legalább egyikén rendelkezésre fog állni szinkron tolmácsolás.

A Kongresszus lefolyásáról beszámolót küldenek majd minden teljes jogú résztvevőnek.

A teljes jogú tagok részvételi díját a második közlemény tartalmazza. A teljes jogú tagok kísérői, akik nem vesznek részt a Kongresszus munkájában, kevesebb részvételi díjat fizetnek. Ezek az összegek magukban foglalják egy—egy tetszés szerint választható kirándulás és kulturális rendezvény részvételi díját. Ezeken kívül is lesznek kirándulások és egyéb rendezvények, amelyekre külön lehet befizetni. A Kongresszus részvételi díjába nem értendő bele az utazás, a szállás és az ellátás költsége.

Akik részt kívánnak venni a Kongresszuson, azoknak ki kell tölteniük egy tájékoztatást kérő űrlapot és el kell küldeniük azt a Kongresszus hivatalos címére:

ICME IV
Mathematics Department
University of California
Berkeley, CA 94 720 USA

Akik ezt megteszik, azok december hó folyamán meg fogják kapni a második közleményt és azzal együtt egy-egy részvételt, illetve szállást igénylő űrlapot is.

A Kongresszussal kapcsolatos mindennemű levelezést annak fenti hivatalos címére kell irányítani. „ATTN: PROGRAM" megjelöléssel kell ellátni az olyan leveleket, amelyeknek feladója a Kongresszus programja után tudakozódik, és „ATTN: LOC" megjelöléssel azokat, amelyekben a feladó a Kongresszussal összefüggő kiállításokról, különleges érdeklődésű munkacsoportokról vagy helyi eseményekről szeretne felvilágosítást kapni.

A Matematika Tanítása szerkesztősége felhívja a lap minden olyan olvasójának figyelmét, akinek szüksége van a 4. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszus tájékoztatást kérő űrlapjára, hogy ezt az igényét mielőbb közölje írásban a szerkesztőséggel: Budapest, Gorkij fasor 17—21., 1071.

VARECZA ÁRPÁD

TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLÁK MATEMATIKA VERSENYEI, I. 1952—70

A tanárképző főiskolák matematika versenyei 1957-ben kezdődött. Sorozatunk bevezető kötete az első 10 év versenyfeladatait és ezek megoldásait tartalmazza. A feladatok nagy részében több, egymástól különböző elvi felépítésű megoldást közöl a szerző, aki a nyíregyházi tanárképző főiskola tanáraként aktív résztvevője a versenybizottságnak. A következő kötetet, amely az 1971—80 évi versenyek feladatait tartalmazza, később bocsátjuk az olvasó rendelkezésére. (8164/I.)

4,50 Ft

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Fűzve

Dr. Kőhegyiné—Vajda: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681) ..... 16,—

Horvay—Pálmay: *Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához* (92 143) 16,50

Czapáry—Virág: *Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában* (92 363) ..... 20,—

Hámori: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205) ..... 10,—

Kovács Gy.: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika III. (29 217) 15,50

Középiskolai matematikai versenyek VI.—VII. kötet (29 188/VI.—VII.) 16,50

Lukács—Scharnitzky: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok VI.* (29 190/VI) ..... 16,—

Cser—Pálfy: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához* (91 478) 19,50

Cser—Pálfy: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanításához* (91 480) ..... 24,—

Élő matematika 1. Tanulmányok. Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1) ..... 18,—

Jánossy—Tasnádi: *Élő matematika 2. Valószínűségszámítás* (92 347/2) ..... 6,—

Gergely—Hódi és mások: *Élő matematika 3. A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3) ..... 13,—

Korányi: *Élő matematika 4. Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4) 18,50

Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184) 11,50

Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1) ..... 10,—

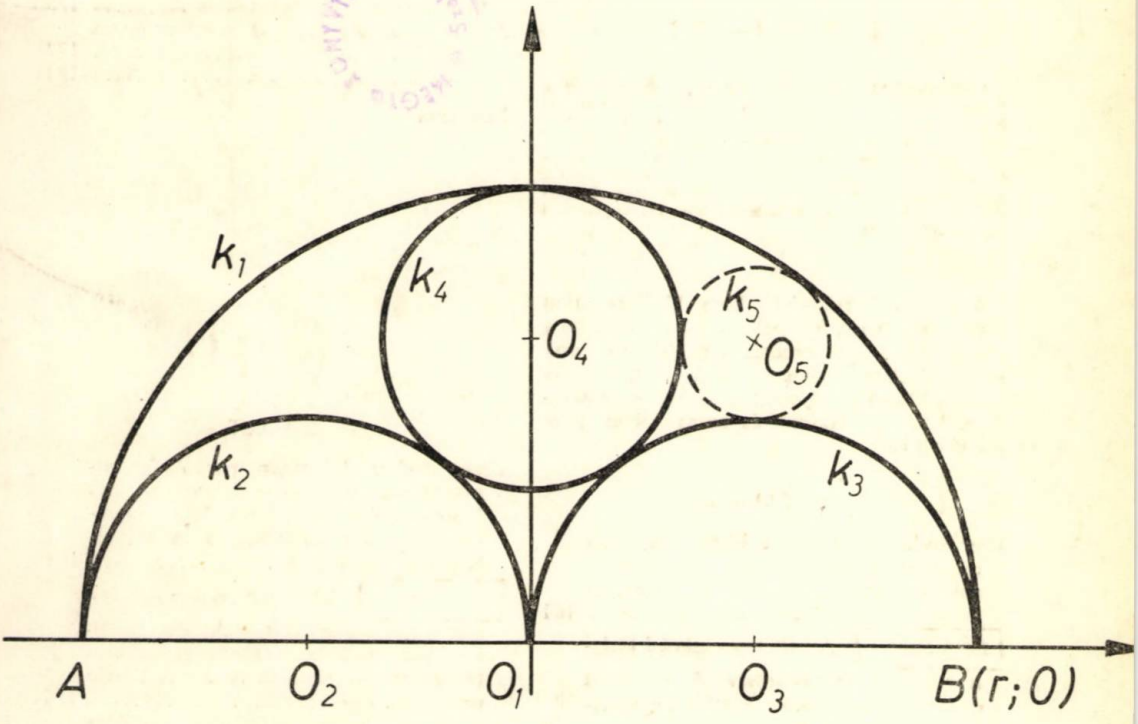
Beszerezhetők

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1979. december * XXVI. évfolyam 6 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200.
79-4795 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalban, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodában (KHI, 1051 Budapest, József nádor tér 1., telefon: 180-850, postacím: *1900 Budapest*) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Cser Andor: Az általános iskolai ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához készült feladatgyűjtemény feladatainak megoldása. II. rész .. 161

Pálfy Sándor: Az általános iskolai ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához készült munkalapok feladatainak megoldása. II. rész.... 166

Káli Ferenc: A szabályos és a derékszögű háromszögnek megfelelő tetraéderekről .. 169

Hódi Endre: Rövid beszámoló a XXI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról ... 173

Dr. Kelemen József: A Hérón-féle háromszögekről 177

FELADATOK 182

Könyvismertetés

СОДЕРЖАНИЕ

Чер Андор: Решения задач сборника для преподавания математики в 5 классе начальной школы по временной учебной программе. Часть II. 161

Пальфи Шандор: Решения задач рабочих листов для преподавания математики в 5 классе начальной школы по временной учебной программе. Часть II. 166

Кали Ференц: О тетраэдрах соответственных правильному и прямоугольному треугольнику 169

Ходи Эндре: Краткий отчет о XXI-ой Международной Математической Олимпиаде для школьников 173

Др. Келемен Йожеф: О треугольниках Герона 177

ЗАДАЧИ 182

Рецензия

INHALT

Cser, Andor: Lösungen zur Aufgabensammlung, die zum Unterricht des Materials des vorläufigen Mathematik-Lehrplans der Grundschule in der 5. Klasse dient. II. Teil 161

Pálfy, Sándor: Lösungen zu den Arbeitsblättern, die zum Unterricht des Materials des vorläufigen Mathematik-Lehrplans der Grundschule in der 5. Klasse dienen. II. Teil 166

Káli, Ferenc: Über die Tetraeder, die dem regelmäßigen, bzw. rechtwinkligen Dreieck entsprechen 169

Hódi, Endre: Kurzbericht über die XXI. Internationale Mathematik-Olympiade.. 173

Dr. Kelemen, József: Über die Hérón-schen Dreiecke 177

AUFGABEN 182

Buchbesprechung

CSER ANDOR
ny. főiskolai tanár
Budapest

Az általános iskolai ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához készült feladatgyűjtemény feladatainak megoldása. II. rész

39.1. A szabályosságok: *a)* $y=3x$; *b)* $y=3x+3$; *c)* $y=x^3$. **39.2.** 1215 kg-ot felrakhatunk a 3 tonnás teherautóra. **39.3.** A 420 Ft-os székekből vásárolhatnak. **39.4.** A Vörös Szegfű Termelőszövetkezet 1 tonnával több kukoricát termelt. **39.5.** 30-féleképpen (6 elemből kiválasztható, kéttagú, ismétlés nélküli variációk száma). **39.6.** 13 órakor. **39.7.** 28 kézfogás történik (8 elemből kiválasztható, kéttagú, ismétlés nélküli kombinációk száma). **39.8.** A 12-edik napon 14, összesen 102 feladatot oldott meg.

40.1. 57. **40.2.** Többszöröse, 34-szerese. **40.3.** *a)* A 9-es alatt található a 63; *b)* a 98 felett található a 14; *c)* 112; *d)* 13; *e)* 84; *f)* 15; *g)* 105. — Az alsó sorban az adott szám kisebb szomszédja feletti szám keresendő: 7, 8, 9, 10, 12, 15.

41.1. 15 hét. **41.2.** 123. **41.3.** 50 Ft, 60 Ft, 70 Ft. **41.4.** *a)* 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28; *b)* 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58. — Bármelyik két tag különbsége osztható 3-mal. **41.5.** Mint az előző feladat *a)* sorozatából kiolvasható: 16. $(3\cdot5+1)$. **41.6.** *a)* 36; *b)* 12; *c)* 24; *d)* 53; *e)* 138; *f)* 109; *g)* 155; *h)* 72 és marad 5; *i)* 207; *j)* 1055 és marad 1; *k)* 1080 és marad 2; *l)* 1013 és marad 1; *m)* 604 és marad 2; *n)* 7018 és marad 4; *o)* 454 és marad 6; *p)* 492 és marad 4; *r)* 1557 és marad 1.

42.1. Igen, 850-szerese. **42.2.** 50 marad. **42.3.** 1. **42.4.** *a)* 9 és marad 26; *b)* 16 és marad 9; *c)* 2 és marad 4; *d)* 2 és marad 194; *e)* 4 és marad 96; *f)* 8 és marad 43; *g)* 19 és marad 13; *h)* 36 és marad 4; *i)* 304 és marad 8; *j)* 99 és marad 22. **42.5.** *a)* egyjegyű hányados; *b)* kétjegyű hányados; *c)* kétjegyű hányados; *d)* négyjegyű hányados; *e)* ötjegyű hányados. **42.6.** *a)* $\approx 400:50$; *b)* $\approx 270:30$; *c)* $\approx 162:4$; *d)* $\approx 2000:200$; *e)* $\approx 304:5$; *f)* $43\,000:215$. **42.7.** *a)* 11; *b)* 8; *c)* 12; *d)* 6; *e)* 10; *f)* 2.

43.1. $(180\cdot120):(15\cdot15)=96$. **43.2.** 5 km. **43.3.** Kereken 623. **43.4.** $(2500:50)+1=51$. **43.5.** *a)* 143; *b)* 91; *c)* 77. **43.6.** Mert $7\cdot13\cdot11=1001$ (lásd a **37.3.** feladatot). **43.7.** A maradék 6, mert a felbontás többi tagja osztható 7-tel. **43.8.** A maradék 5. **43.9.** $999+1$. **43.10.** 15 nap alatt. **43.11.** 1650 Ft-ot (ebből 1 napra esik 55 Ft; ez a kérdésből kimaradt). **43.12.** 20 óra alatt. **43.13.** 20 Ft, 120 Ft, 160 Ft, 200 Ft. **43.14.** 660 m. **43.15.** 96 dl. **43.16.** $75\cdot39\cdot12=35\,100$; $100\cdot100\cdot100=1\,000\,000$; $63\cdot54\cdot15=51\,030$; $25\cdot42\cdot50=52\,500$; $13\cdot119\cdot1=1547$; $13\cdot7\cdot1=91$. **43.17.** $(1500\cdot60:50=)$ 1800-at. **43.18.** Peti 5-ödik, 10-edik, 15-ödik stb. lépéseivel Robi 6-odik, 12-edik, 18-adik stb. lépései estek egybe. **43.19.** Kereken 455 fordulatot tett a kerék. **43.20.** Alinak és Bubának legalább 5—5 almája volt. Ez esetben az osztozkodás után mindannyiuknak 2—2 almája lett.

44.1. 16 füzetet. **44.2.** Egy főre 300 Ft jut. Ha harmadannyi ember között osztjuk fel ugyanazt az összeget, akkor egy főre háromszor annyi jut, tehát 900 Ft. **44.3.** *a)* $x \cdot y = 48$; *b)* $y = \frac{120}{x}$; *c)* $y = \frac{24}{x} - 1$. **44.4.** 14 000 kg-ot. **44.5.** *a)* 355:10; *b)* 842:10; *c)* 2650:20; *d)* 3450:60; *e)* 760:30; *f)* 4960:100; *g)* 9650:150.

45.1. *a)* 104; *b)* 120; *c)* 1600. **45.2.** *a)* $42_{⑤}$; *b)* $110:5 = 22$. **45.3.** *a)* 14 és marad 1; *b)* $1121_{③}:10_{③} = 112_{③}$ és marad 1. **45.4.** Felső sor: $21\,000_{③}:10_{③} = 2100_{③}$, $2100_{③}:10_{③} = 210_{③}$, $210_{③}:10_{③} = 21_{③}$. Alsó sor: $21\,000_{③}:1000_{③} = 21_{③}$. **45.5.** Az állítások logikai értéke sorban: *i, i, h, i, h, i, h, h, i, h.*

46.1. Van, mert a szögek összege 360°. A három hegyesszög összege 270°-nál kisebb, a lehetséges negyedik szög tehát 90°-nál nagyobb: tompaszög. **46.2.** Legfeljebb három. Négy hegyesszög összege ugyanis 360°-nál kisebb, így az ötödik szögnek $540° - 360° = 180°$-nál nagyobbnak kellene lenni, de akkor az ötszög nem konvex. **46.3.** *a)* 90°-kal; *b)* 180°-kal. **46.4.** *a)* 90°-kal balra; *b)* 90°-kal jobbra; *c)* 90°-kal balra; *d)* 180°-kal („hátra arc"-ot csinál). **46.5.** *a)* $\frac{1}{12}$ részével, *b)* $\frac{1}{4}$ részével. **46.6.** 6 óra alatt.

47.1. Nagyobb középponti szöghöz nagyobb húr tartozik, ha a szögek 180°-nál kisebbek. **47.2.** Nagyobb húr közelebb van a középponthoz, mint a kisebb húr. **47.3.** Átmegy a középponton: a távolsága 0. **47.4.** Amekkora az átmérő.

48.3. 360°. **48.4.** 72°-os középponti szögeket kell kimérni. **48.5.** *a)* 30°; *b)* 90°; *c)* 210°. **48.7.** 70° és 50°.

49.1. 64 lap van egymáson (2^6). **49.2.** *a)* 4 nyolcad; *h)* 4 tizenhatod; *c)* 4 harmincketted. **49.3.** *a)* 1 harminckettedet; *b)* 1 hatvannegyedet; *c)* 1 százhuszonnyolcadot. **49.4.** *a)* 1 százhuszonnyolcadot; *b)* 1 kétszázötvenhatodot.

50.1. Az 1 negyed. **50.2.** A 3 negyed. **50.3.** Balról jobbra: felét, 2 harmadát, 3 negyedét, 4 ötödét. **50.4.** *a)* 1 kilencedet; *b)* 1 huszonhetedet. **50.5.** *a)* 1 huszonhetedet, *b)* 1 nyolcvanegyedet. **50.6.** Egyenlők. **50.7.** Az 1 harmad harmadrésze nagyobb, mint az 1 kilenced harmadrésze.

51.1. 1 század; 1 ezred; 2 tízezred; 5 százezred; 20 század; 304 ezred; 1010 százezred. **51.2.** A harmad nagyobb. **51.3.** A 11 tized nagyobb. **51.4.** *a)* feleket; *b)* harmadokat; *c)* negyedeket stb.; *i)* tizedeket. **51.5.** *a)* 1 századot; *b)* 1 ezredet. **51.6.** Az 1 tized tizedrésze kisebb, mint az 1 század tízszerese. **51.7.** *a)* $0{,}6 > 0{,}18$; *b)* $1{,}2 > > 0{,}97$; *c)* $12{,}01 < 12{,}1$; *d)* $1{,}05 < 1{,}11$; *e)* $1{,}001 < 1{,}01$; *f)* $3{,}08 < 3{,}14$.

52.1. *a)* 0,05 kg = 5 dkg; *b)* 0,1 óra = 6 perc; *c)* 0,8 Ft = 80 f; *d)* 1,6 m = 160 cm; *e)* 0,01 m = 1 cm; *f)* 0,002 m = 2 mm; *g)* 5,6 km = 5600 m; *h)* $0{,}05\ m^2 = 5\ dm^2$; *i)* $0{,}01\ cm^2 = 1\ mm^2$; *j)* 0,6 l = 6 dl. **52.2.** A mértékegység tízszeresét vesszük. **52.3.** A mértékegység ezredrészét vesszük. **52.4.** 2500 m. **52.5.** Az állítások logikai értéke sorban: *h, i, h, i, h, i, i.*

53.1. 29,47. **53.2.** 386 Ft-ot. **53.3.** $8{,}6 - 2{,}5 + 3{,}1 + 0{,}8 = 10$. **53.4.** Az üres helyekre kerülő számok (felülről lefelé): 147,6; 204,2; 27,4; 96,1. **53.5.** Az egyik oldal 7,6 cm, a másik 4,2 cm. **53.6.** 1155,36 Ft. **53.7.** 332,80 Ft. **53.8.** 181,50 Ft. **53.9.** 4029,60 Ft. **53.10.** 1053 tonna. **53.11.** 2,38 tonna, tehát elszállítható. **53.12.** 216,04 m^2. **53.13.** 7,6 kg. **53.14.** Az üres helyekre kerülő számok (felülről lefelé): 102 600; 20 786,6;

1,728; 24,3; 10. **53.15.** Az egyik oldal 12,2 cm, a másik 6 cm. **53.16.** Robi pénze 0,80 Ft, Petié 2,40 Ft. **53.17.** Az egyik oldal 7,2 m, a másik 2,5 m. (A feladat ezen a fokon csak próbálgatással oldható meg. A próbálgatás egyszerűbb, ha a kerületet 22 m-nek vesszük. Oldalai: 9 m és 2 m.) **53.18.** 16,50 Ft. **53.19.** *a)* 2,7; *b)* $-0{,}05$; *c)* 10,9; *d)* $-5{,}12$; *e)* 32,3; *f)* $-146{,}4$.

54.1. 8,4 kg-ot. **54.2.** 23 °C. **54.3.** Jenő 30 Ft-tal kevesebbet, Jóska 10 Ft-tal többet, Jutka 20 Ft-tal többet kapott, mint az átlag. **54.5.** Kereken 6,8 l. **54.6.** *a)* 55; *b)* 34; *c)* 829; *d)* 7,5; *e)* 4,75; *f)* 2,8.

55.1. *a)* $0{,}\dot{6}$; *b)* $0{,}6\dot{5}$; *c)* $0{,}65\dot{4}$; *d)* $0{,}654\dot{3}$; *e)* $0{,}6543\dot{2}$; *f)* $0{,}\dot{1}$; *g)* $0{,}1\dot{2}$; *h)* $0{,}12\dot{3}$; *i)* $0{,}123\dot{4}$; *j)* $0{,}1234\dot{5}$; *k)* $0{,}12345\dot{6}$. **55.2.** 0,011 222 333 344 444 ... (végtelen, nem szakaszos tizedes tört). **55.3.** Például: 1,010 010 001 000 01.... **55.4.** *a)* $35{,}\dot{6} \approx 35{,}7$; *b)* 4,2; *c)* 8,6.

56.1. A törtszámok: $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$ és egy egész szám: 6. **56.2.** 28 tanuló. **56.3.** 8 cikkelye. **56.4.** *a)* 45 perc; *b)* $\frac{1}{12}$ része. **56.5.** $\frac{3}{7}$ része. **56.6.** 22. **56.7.** *a)* $3+\frac{1}{2}$; $4+\frac{2}{3}$; $4+\frac{2}{5}$; $3+\frac{4}{7}$; $2+\frac{8}{9}$; *b)* $1+\frac{1}{2}$; $1+\frac{2}{3}$; $1+\frac{6}{10}$; 3; $2+\frac{1}{12}$. **56.8.** *a)* $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{7}$; $\frac{37}{8}$; *b)* $\frac{25}{2}$; $\frac{47}{3}$; $\frac{75}{4}$; $\frac{104}{5}$. **56.9.** 7 szemet. **56.10.** 1 óra 45 percig. **56.11.** *a)* $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{14}{5}$; $\frac{19}{6}$; *b)* $\frac{23}{2}$; $\frac{97}{8}$; $\frac{139}{10}$; $\frac{137}{7}$.

57.1. *a)* $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; *b)* $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$; *c)* $\frac{4}{5}=\frac{16}{20}$; *d)* $\frac{5}{4}=\frac{25}{20}$. **57.2.** 135 km. **57.3.** 12 nap.

57.4. 10. **57.5.** $3=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=\frac{15}{5}=\frac{18}{6}$. **57.6.** *a)* $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\frac{12}{18}$; *b)* $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=\frac{16}{20}=\frac{20}{25}=\frac{24}{30}$; *c)* $\frac{8}{9}=\frac{40}{45}=\frac{64}{72}=\frac{88}{99}=\frac{96}{108}$.

58.1. *a)* $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$; *b)* $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$; *c)* $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$; *d)* $\frac{56}{40}=\frac{7}{5}$. **58.2.** $\frac{2}{3}$ része. **58.3.** *a)* $\frac{13}{21}$; *b)* $\frac{2}{3}$; *c)* $\frac{5}{7}$; *d)* $\frac{20}{13}$; *e)* 2; *f)* $\frac{1}{5}$; *g)* 7. **58.4.** 29, 31, 37, 41, 43, 47. **58.5.** *a)* 1, 2, 3, 4, 6, 12; *b)* 1, 3, 5, 15; *c)* 1, 2, 4, 8, 16; *d)* 1, 2, 4, 5, 10, 20; *e)* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; *f)* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48; *g)* 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 20, 30, 60; *h)* 1, 7, 11, 77; *i)* 1, 7, 13, 91; *j)* 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. **58.6.** *a)* $\frac{72}{48}=\frac{36}{24}=\frac{24}{16}=\frac{18}{12}=\frac{12}{8}=\frac{9}{6}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$; *b)* $\frac{60}{45}=\frac{20}{15}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$; *c)* $\frac{90}{60}=\frac{45}{30}=\frac{30}{20}=\frac{18}{12}=\frac{15}{10}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

59.1. 5,4. **59.2.** 10,8. **59.3.** 297. **59.4.** 254. **59.5.** 508. **59.6.** 762. **59.7.** 154 000. **59.8.** 1 540 000. **59.9.** 15 400 000. **59.10.** 16 940 000 Ft. **59.11.** 0,5. **59.12.** 0,05. **59.13.** 300. **59.14.** 4%

60.1. 7 óra 30 perc. **60.2.** 12 perc. **60.3.** 3 perc. **60.4.** $\frac{1}{6}$ részét. **60.5.** Sorban, felülről lefelé: $\frac{13}{5}\cdot 10=\frac{130}{5}=26$; $\frac{3}{4}\cdot 8=\frac{24}{4}=6$; $\frac{4}{12}\cdot 10=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}$; $\frac{24}{25}\cdot 5=\frac{120}{25}=\frac{24}{5}$; $\frac{9}{8}\cdot 12=\frac{108}{8}=\frac{27}{2}$. **60.6.** $\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{3}{6}$. **60.7.** $\frac{1}{5}\cdot 3=\frac{6}{10}$. **60.8.** $1{,}3\cdot 4=5{,}2$. **60.9.** $1{,}27\cdot 3=3{,}81$. **60.10.** $3{,}4:4=0{,}85$. **60.11.** $6{,}42:3=2{,}14$. **60.12.** *a)* $\frac{15}{4}$; *b)* $\frac{2}{7}$; *c)* $\frac{4}{5}$; *d)* $\frac{3}{13}$; *e)* $\frac{19}{2}$; *f)* $\frac{2}{17}$; *g)* 60.

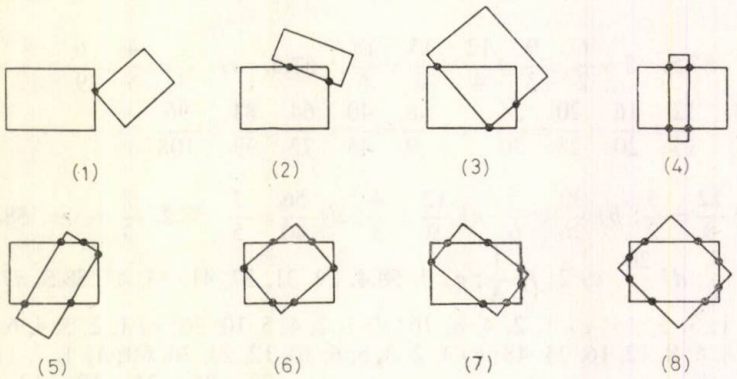
61.1. A felvett egyenessel párhuzamos egyenesben. **61.2.** Kétszer. **61.3.** Van, például a kocka három szomszédos lapjának a síkja.

62.1. A hiányzó adatok felülről lefelé: 62; 44,8; 216; 402,4; 10. **62.2.** $a=5$, $m=26$. **62.3.** $a=1$, $m=16$ vagy $a=3$, $m=4$. **62.4.** Pontos mérés esetén a legrövidebb út 5 cm. **62.5.** Az alapél: $a=12$ cm, a magasság: $m=24$ cm. **62.6.** A számítás menete: $(5\cdot 4)+(4\cdot 16+4\cdot 4-2\cdot 2)+(4\cdot 36+6\cdot 6-4\cdot 4)+(5\cdot 64+8\cdot 8-6\cdot 6)=608$ (cm²), vagy $6\cdot 64+4\cdot 36+4\cdot 16+4\cdot 4=608$ (cm²). **62.7.** A számítás menete: $(10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)2+10\cdot 4=150$ cm². **62.8.** 8000 db. **62.9.** A három él: 15 cm, 5 cm, 10 cm. A felszín: 550 cm². **62.10.** Hét különböző téglatest állítható össze. A legnagyobb felszínű téglatest élei: 1 cm, 1 cm, 64 cm, a legkisebb felszínűé pedig: 4 cm, 4 cm, 4 cm. **62.11.** $(15^2+13^2+11^2+\ldots+3^2+1^2=)$ 680 db kockát kellett felhasználni. **62.12.** Négy különböző téglatest állítható össze. A legnagyobb felszínű téglatest élei: 1 cm, 1 cm, 30 cm, a legkisebb felszínűé pedig: 1 cm, 5 cm, 6 cm.

*

I. 1=fúró, 2=kalapács, 3=csavarhúzó, 4=harapófogó.

II. A rajzok:



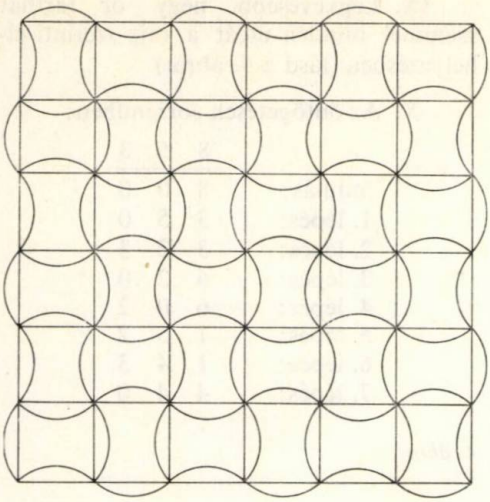
1. ábra

8-nál több közös pont nem lehetséges.

III. A négy tűszúrás egy téglalap négy csúcspontja.

IV. A négy tűszúrás egy körbe írható trapéz négy csúcspontja.

V. A négy egyenlő körív határolta síkidommal egybevágó síkidomokkal a sík lefedhető. (Lásd a 2. ábrát!)

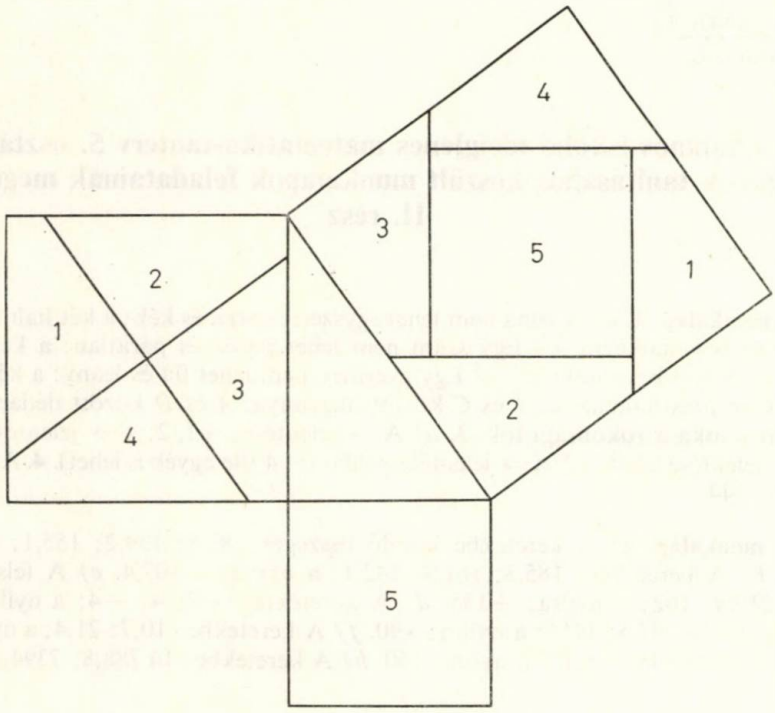


2. ábra

VI. Az összeállítást lásd a 3. ábrán!

VII. A *B* ajtóhoz 70-féleképpen lehet eljutni. A rajz szerinti elhelyezésben az egyes szobákba ui. az alábbi számok mutatják, hogy hányféleképpen lehet eljutni:

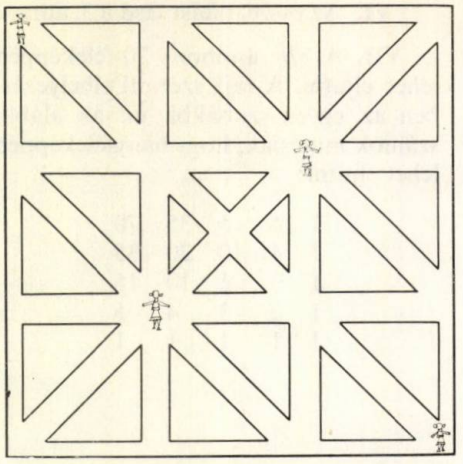
1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1



3. ábra

VIII. Hatszor hat szoba esetén az előbbi táblázatot felül és jobboldalt a következő számokkal egészítjük ki:

1 6 21 56 126 252.



4. ábra

IX. Legkevesebb négy őr tarthat szemmel minden utcát a rajz szerinti elhelyezésben (lásd a 4. ábrát).

X. Az öntögetések sorrendben:

	8	5	3
indulás:	8	0	0
1. lépés:	3	5	0
2. lépés:	3	2	3
3. lépés:	6	2	0
4. lépés:	6	0	2
5. lépés:	1	5	2
6. lépés:	1	4	3
7. lépés:	4	4	0

PÁLFY SÁNDOR
ny. főiskolai tanár
Budapest

Az általános iskolai ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához készült munkalapok feladatainak megoldása. II. rész

51/1. munkalap. 1. *a)* A ruha nem lehet egyszerre sárga és kék: a két halmaz közös részét kell bevonalkázni. *b)* Egy szám nem lehet páros és páratlan: a két halmaz közös részét kell bevonalkázni. *c)* Egy gyermek nem lehet fiú és leány: a két halmaz közös része üres halmaz. **2.** *A* és *C* között nagyanya, *A* és *D* között dédanya, *D* és *B* között unoka a rokonsági fok. **3.** *a)* A $\rightarrow$ jelentése: $+1, 2$; a $\Rightarrow$ jelentése: $-0{,}8$. *b)* A $\rightarrow$ jelentése lehet: $\cdot 2$; a $\Rightarrow$ jelentése például: $: 4$ (de egyéb is lehet). **4.** Az ötjegyű szám: 89 544.

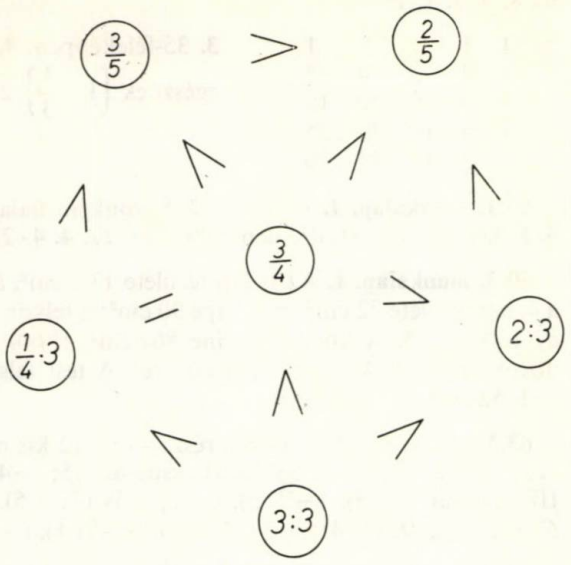
51/2. munkalap. *a)* A keretekbe írandó összegek: 82,8; 139,2; 155,1; a nyílra: $+90{,}6$. *b)* A keretekbe: 185,3; 161,8; 142,1; a nyílra: $-107{,}4$. *c)* A felső sorba: 284,8; 219,4; 102; a nyílra: $+135$. *d)* A keretekbe: -2; 4; -4; a nyílra: -12. *e)* A keretekbe: 97,5; 1755; a nyílra: $\cdot 90$. *f)* A keretekbe: 10,7; 21,4; a nyílra: $\cdot 2$. *g)* A keretekbe: 18,3; 9,15; a nyílra: $:50$. *h)* A keretekbe: 14 788,8; 7394,4; a nyílra: $:12$.

51/3. munkalap. 1. *a)* Az egymást követő sorok: $82{,}4+10{,}3+61{,}8=30{,}9+51{,}5+72{,}1=41{,}2+92{,}7+20{,}6=154{,}5$; *b)* $\frac{8}{5}+\frac{1}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3}{5}+1+\frac{7}{5}=\frac{4}{5}+\frac{9}{5}+\frac{2}{5}=3$.

2. *a)* $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}+1+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{2}=5$; *b)* $142{,}1+60{,}9+81{,}2+$

$+182{,}7 = 162{,}4 + 20{,}3 + 101{,}5 + 182{,}7 = 162{,}4 + 121{,}8 + 40{,}6 + 142{,}1 = 466{,}9$. **3.** $3{,}2 \cdot 240 = 768$; $4 \cdot 180{,}60 = 722{,}4$; $12{,}5 \cdot 82 = 1025$; $18 \cdot 0{,}80 = 14{,}40$. Fizetendő: 2529,80 Ft.

51/4. munkalap. 1. A bevonalkázott kis négyzetek száma: *a)* 8, 16, 24; *b)* 4, 8, 12, 16, 20; *c)* 3, 9, 15, 21. A $\frac{4}{5}$ rész $\frac{2}{5}$ résszel több. A $\frac{3}{8}$ rész nagyobb, mert az 9 kis négyzet, a másik 8. **2.** Például: l. az ábrát.



51/5. munkalap. 1. A kétszer bevonalkázott rész: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. A vonalazatlan rész $\frac{1}{3}$. **2.** $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ része. **3.** *a)* $\frac{1}{4}$ része; *b)* $\frac{1}{3}$ része; *c)* $\frac{3}{8}$ része. **4.** 1 és 2 esetén kétszerese, illetve $\frac{1}{2}$-e; 1 és 6 esetén hatszorosa, illetve $\frac{1}{6}$-a; 2 és 4 esetén kétszerese, illetve $\frac{1}{2}$-e; 4 és 6 esetén másfélszerese, illetve $\frac{2}{3}$-a; 3 és 4 esetén $\frac{4}{3}$ része, illetve $\frac{3}{4}$ része; 3 és 6 esetén kétszerese, illetve $\frac{1}{2}$-e.

51/6. munkalap. 1. Például: *a)* $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$; *b)* $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \ldots$; *c)* $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} \ldots$. A számpároknak megfeleltetett pontok egyenesen helyezkednek el. **2.** A számpárok: $0{,}9 + \frac{1}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}$ (a táblázatban $\frac{1}{3}$ van) $= \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{4} + \frac{4}{8} = \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} + 0{,}3 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$ (a táblázatban a $\frac{3}{5}$ helyett tévesen $\frac{2}{5}$ van) $= 1$. Kimarad: $\frac{5}{6}$ és $\frac{2}{7}$.

52/1. munkalap. 1. 8-cal oszthatók: 104 és $104 + n \cdot 8$ (n a 0-nál nagyobb, 13-nál kisebb egész szám); 6-tal oszthatók: 102 és $102 + n \cdot 6$ (n a 0-nál nagyobb, 16-nál kisebb egész szám); 5-tel oszthatók a 0-ra és 5-re végződő számok. **2.** Pirossal beírandó első szám: 201, a többi: 210, 219, ... 300; zölddel az első szám: 207, a többi: 214, 221, ... 298.

55/1. munkalap. 1. Ha egy útszakaszon kétszer nem mehetünk át, a lehetséges esetek száma (az alsó körtől kiindulva és az óramutató járását követve): *a)* 3, 3, 5, 5; *b)* 8, 5, 3, 1, 1.

2.

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35
1	5	15	35	70

3. 35-féleképpen. **4.** A végén megmaradt 6 gombóc az egésznek $\left(1-\frac{1}{3}\right):2=\frac{1}{3}$ része. Az egész: 18.

60/1. munkalap. 1. *b)* és *d)*. **2.** Soronként haladva: -1; -2, -3, $+2$, $+3$; $+1$. **3.** Lehet: *a), c), d), e);* nem lehet: *b), f).* **4.** $4 \cdot 21=84$. **5.** Nulla.

60/2. munkalap. 1. Az 1. lap területe 13,5 cm², a 2. lapé 54 cm², a 3. lapé 13,5 cm², a 4. lap területe 72 cm², az 5. lapé 90 cm²; a felszín 243 cm². **2.** *a)* 102 cm²; *b)* 170 cm²; *c)* 150 cm². **3.** A kocka felszíne 864 cm², ebből leesik $6 \cdot 4 \cdot 4$ cm²$=96$ cm², viszont növekszik $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ cm²$=384$ cm²-rel. A test felszíne: 864 cm² − 96 cm² + 384 cm² = = 1152 cm².

63/1. munkalap. 1. A közös rész: $4 \cdot 3=12$ kis négyzet. **2.** Az I. csúcsai: $(-2; -3)$, $(2; -3)$ $(2; 3)$, $(-2; 3)$,; a II. csúcsai: $(5; -4)$, $(5; 4)$, $(-5; 4)$, $(-5; -4)$; a III. csúcsai: $(7; 5)$, $(-7; 5)$, $(-7; -5)$ $(7; -5)$. **3.** *a) A*: $(-7; 4)$, *B*: $(-7; -2)$, *C*: $(3; -2)$, *D*: $(3; 4)$; *b)* $(-2; 1)$; *c)* $(-7; 1)$, $(-2; -2)$, $(3; 1)$, $(-2; 4)$.

63/2. munkalap. 1. *a)* 12; *b)* 60; *c)* $60+28=88$. **2.** $1 \cdot 1$-esből 25, $2 \cdot 1$-esből 40, $3 \cdot 1$-esből 30, $4 \cdot 1$-esből 20, $5 \cdot 1$-esből 10, $3 \cdot 2$-esből 24, $4 \cdot 2$-esből 16; $5 \cdot 2$-esből 8; $3 \cdot 4$-esből 12, $3 \cdot 5$-ösből 6; $4 \cdot 5$-ösből 4, $2 \cdot 2$-esből 16, $3 \cdot 3$-asból 9, $4 \cdot 4$-esből 4, $5 \cdot 5$-ösből 1 (55 a négyzet). **3.** $1=1$; $2=10_{(2)}$; $3=11_{(2)}$; $4=100_{(2)}$; $5=101_{(2)}$; $6=110_{(2)}$; $7=111_{(2)}$; $13=1101_{(2)}$; $15=1111_{(2)}$.

69/1. munkalap. *a)* $k \approx 5{,}3$ cm $+2{,}8$ cm $+6$ cm $=14{,}1$ cm ($\approx 352{,}5$ m), $t \approx 53$ mm $\cdot 28$ mm $:2=742$ mm² ($\approx 132{,}5$ m $\cdot 70$ m $:2=4637{,}5$ m²); *b)* $k \approx 4{,}6$ cm $+$ $+3{,}8$ cm $+5{,}5$ cm $=13{,}9$ cm ($\approx 347{,}5$ m); I. $t \approx 3300$ m², II. $t \approx 2200$ m². A kert területe ≈ 5500 m²; *c)* $k \approx 25$ mm $+23$ mm $+46$ mm $+69$ mm $=163$ mm ($\approx 407{,}5$ m); I. $t \approx 525$ m², II. $t \approx 3450$ m², III. $t \approx 2925$ m². A kert területe ≈ 6900 m²; *d)* $k \approx 25$ mm $+$ $+43$ mm $+37$ mm $+40$ mm $=145$ mm (≈ 363 m); I. $t \approx 950$ m², II. $t \approx 2315{,}6$ m², III. $t \approx 2356{,}3$ m², IV. $t \approx 2112{,}5$ m². A kert területe $\approx 7734{,}4$ m².

69/2. munkalap. *a)* $6 \cdot 8+2=50$; *b)* $7 \cdot 6-9=33$; *c)* $5 \cdot 8 \cdot 2+5=85$; $12^2=144$; $\sqrt{625}=25$; $5!=120$.

69/3. munkalap. Vízszintes: *1.* 97 531; *2.* 956 920; *3.* 3364; *4.* 323; *5.* 81; *6.* 24; *7.* 404 955. Függőleges: *1.* 99; *4.* 324; *8.* 0; *9.* 7532; *10.* 563 324; *11.* 396; *12.* 1248; *13.* 0; *14.* 125; *15.* 49.

69/4. munkalap. 1. A hosszabbik oldal felezőpontját és a vele szemben fekvő csúcsokat összekötő két szakasz mentén vágjuk el. A négyzet területe a téglalap területével (18 cm²) egyenlő. Átlójának hossza 6 cm. **2.** Bármelyik befogó felezőpontján átmenő, a másik befogóval párhuzamos vágással kapjuk a megfelelő két részt. A téglalap területe 6,25 cm². **3.** Bárhol vágjuk el a paralelogrammát a hosszabbik oldalra merőlegesen úgy, hogy a vágás mindkét hosszabb oldalt messe, a két részből téglalapot állíthatunk össze. A két téglalap területe: 8 cm², illetve 6 cm². **4.** Balról jobbra haladva: $\frac{1}{4}$ rész; $\frac{1}{2}$ rész; $\frac{1}{2}$ rész; $\frac{3}{8}$ rész; $\frac{3}{8}$ rész; $\frac{3}{8}$ rész.

KÁLI FERENC
gimnáziumi tanár
Bicske

A szabályos és a derékszögű háromszögnek megfelelő tetraéderekről

1. A gimnáziumban bevezetésre kerülő új matematika-tanterv az eddiginél több lehetőséget biztosít a sík- és térgeometria egységben való tanítására. Már az első osztályban hallanak a tanulók térbeli transzformációkról, a gömb síkmetszeteiről, a gömb érintőkúpjáról stb. A kiegészítő anyag keretében a tetraéderrel kapcsolatos néhány nevezetes tétel tárgyalására is mód nyílik.

A tetraéderek tanulmányozása nagyon jól segítheti a tantervi célkitűzések eredményesebb megvalósítását. A szakköri munka során magam is meggyőződhettem arról, hogy a tanulók számára érdekesek a tetraéderekkel kapcsolatos feladatok és tételek. Először meglepő, majd egyre érthetőbb számukra a háromszögekkel való sok rokon vonás. Természetesebbé válik a sík és tér kapcsolata. Az aránylag könnyen elsajátítható sok új ismereten túl gondolkodásukban az analógia alkalmazása egyre nagyobb szerepet játszik. Pólya György a következőt írja erről ismert könyvében [1]: „Az analógia teljesen áthatja gondolkodásunkat, mindennapi beszédünket és hétköznapi logikánkat csakúgy, mint a kifejezés művészi eszközeit és a legmagasabb tudományos tevékenységet. Alkalmazása persze igen különféle szinten történik... Mindenféle analógiának lehet szerepe feladatok megoldásában, és így egyiket sem mellőzhetjük."

Azt a tényt, hogy a háromszög térbeli analóg alakzatának a tetraédert tekintjük, a tanulók természetesnek tartják. Az analógia létjogosultságát a két alakzatra vonatkozó tételek egész sora indokolja. Az új tantervben kiegészítő anyagként szerepel a tetraéderbe és a tetraéder köré írható gömb, az élérintő gömb, a súlypont, továbbá a magasságpont létezésének feltétele. Az érdeklődő tanulóknak ajánlhatjuk Molnár Ferenc cikkét [2], amelyben az említetteken kívül a tetraéder Euler-egyeneséről, a két Feuerbach-gömbről is részletesen olvashatnak.

2. Mivel a háromszögek között vannak speciálisak is (szabályos, derékszögű, egyenlő szárú), ezért jogosan vetődik fel a kérdés, hogy a tetraéderek közül melyeket tekintsük ezek analóg alakzatainak. A kérdésre adható válasz meglepő, mivel nemcsak egy típusú tetraéder rendelkezhet olyan tulajdonsággal (vagy tulajdonságokkal), aminek alapján a speciális háromszög megfelelő alakzatának tekinthetjük. A válasz ugyanis attól függ, hogy a definiáló tulajdonságok közül melyiket vesszük alapul.

Vizsgáljuk először a szabályos háromszöggel analóg tetraédereket! A szabályos háromszöget definiáló tulajdonságok általánosításaként a következő esetek adódnak ([3], [4]):

a) Ha abból indulunk ki, hogy a szabályos háromszög bármely két csúcsának távolsága egyenlő, akkor analóg alakzatként az egyenlő hosszúságú élekkel rendelkező tetraéder adódik: ez a *szabályos tetraéder.*

b) Ha a szabályos háromszög oldalainak egybevágóságát vesszük alapul, akkor analóg alakzatként olyan tetraéder adódik, amelynek lapjai egybevágó háromszögek. Az ilyen tetraédert *egyenlő oldalúnak* nevezzük.

c) A szabályos háromszög oldalainak mértékszáma megegyezik. Ha ezt a tulajdonságot általánosítjuk, akkor analóg alakzatként olyan tetraéder adódik, amelynek lapjai *egyenlő területűek.*

d) Ha a szabályos háromszög szögeinek egyenlőségét vesszük alapul, akkor analóg alakzatként az *egyenlő térszögű* tetraédert kapjuk.

Kárteszi Ferenc [3]-ban bebizonyította, hogy az egyenlő térszögű tetraéder lapjai egybevágók. Könnyen belátható, hogy a lapok területének egyenlőségéből azok egybevágósága következik. (Lásd [5]-ben a 2092. feladatot!) Ezért a *b), c), d)* tulajdonságokkal rendelkező tetraéderek ekvivalens alakzatok. A szabályos háromszög analóg alakzataként végül is a szabályos és az egyenlő oldalú tetraéder adódik.

Az egyenlő oldalú tetraéder szabályosságát a tanulók először idegenkedve fogadják. Ezért célszerű megmutatni, hogy az ilyen tetraéder a szabályos háromszögre jellemző egyéb tulajdonságokkal is rendelkezik. Például: a súlypont, a beírt és köré írt gömb középpontja egybeesik; három szimmetriatengellyel rendelkezik; a belső lapszög felezősíkja átmegy a szemköztes él felezőpontján, a külső lapszög felezősíkja pedig párhuzamos ezzel az éllel. Ezek a tulajdonságok könnyen bizonyíthatók, ha figyelembe vesszük, hogy az ilyen tetraéder téglatestből származtatható a lapátlók meghúzásával. A tanulókkal készíttessük el kartonból a tetraédert, amelynek hálóját egy hegyesszögű háromszögből kapják a középvonalak berajzolásával! A háló vizsgálatából az is könnyen belátható, hogy nincs olyan tetraéder, amelyet négy egybevágó derékszögű vagy tompaszögű háromszög határolna.

3. A következőkben a derékszögű háromszögnek megfelelő tetraédereket tekintjük át. A definiáló tulajdonság mellett célszerű azt is vizsgálni, hogyan érvényesül a Thalész-tétel, illetve Pitagorasz tétele.

3.1. A derékszögű háromszögben az egyik csúcsban találkozó két oldal merőleges egymásra. Ennek figyelembevételével az analóg alakzat olyan tetraéder lesz, amelynek egyik csúcsában összefutó élek páronként merőlegesek egymásra. Ez a *derékszögletű tetraéder.*

Ha a derékszögletet közrefogó lapokat befogólapoknak, a szemköztest átfogólapnak nevezzük, akkor érvényes a Pitagorasz-tétel a következő alakban: A befogólapok területének négyzetösszege egyenlő az átfogólap területének négyzetével.

A Thalész-tételnek is megtaláljuk megfelelőjét, ha azt következőképpen fogalmazzuk a háromszögre: A derékszögű háromszög átfogója felezi a köré írt körnek azt az átmérőjét, amely a derékszög csúcsából indul ki és az átfogó súlypontján megy át. A derékszögletű tetraéder esetében a tétel így hangzik: A derékszögletű tetraéder átfogólapja harmadolja a köré írt gömbnek azt az átmérőjét, amely a derékszöglet csúcsából indul ki és az átfogólap súlypontján megy keresztül.

Érvényes a befogótétel is a következő alakban: Bármelyik befogólap területe mértani középarányos az átfogólap területe és az illető befogólap átfogólapra eső merőleges vetületének területe között.

A derékszögű háromszögnél tanultakhoz hasonlóan értelmezni lehet a testszögletek szögfüggvényeit a lapok területének hányadosaként, és az így értelmezett szögfüggvények közötti összefüggések is teljes analógiát mutatnak a derékszögű háromszög szögeire megismert összefüggésekkel.

Ismeretes, hogy a derékszögű háromszögben:

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

A derékszögletű tetraéderben:

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

E két összefüggés bizonyítása is teljes analógiát mutat. (Az utóbbi összefüggés bizonyítása az 1978. évi OKTV első fordulóján került kitűzésre.)

Tudjuk, hogy a derékszögű háromszögek derékszögű csúcsai — közös átfogó esetén — egy körön, illetve gömbön helyezkednek el. Mi lesz ennek a tételnek térbeli megfelelője? Nyilván nem lehet szó közös átfogólapú derékszögletű tet-

raéderekről, mivel egy adott hegyesszögű háromszöghöz csak egy ilyen típusú tetraéder tartozik. De ha azokat a derékszögletű tetraédereket tekintjük, amelyeknek átfogólapja egy adott körbe írt hegyesszögű háromszög, akkor már kérdezhetjük, hogy mi lesz a derékszöglet csúcspontjainak mértani helye. A válasz meglepő: A mértani hely forgásellipszoid lesz. (Lásd a kitűzött feladatot!) Ez az állítás elemi módszerekkel is könnyen bizonyítható.

3.2. Vegyük most alapul a derékszögű háromszögnek azt a tulajdonságát, hogy a köré írt kör középpontja az egyik oldal súlypontjával esik egybe! Analóg alakzatként így olyan tetraéder adódik, amelynél a köré írt gömb középpontja az egyik lap súlypontjával esik egybe. Ilyen feltételek mellett az a lap, amelyen a gömb középpontja van, szabályos háromszög lesz. Tekintsük ezt a háromszöget a tetraéder átfogólapjának, csúcsait jelöljük *A, B, C*-vel, a tetraéder negyedik csúcsát *D*-vel! Könnyen bizonyítható a következő összefüggés:

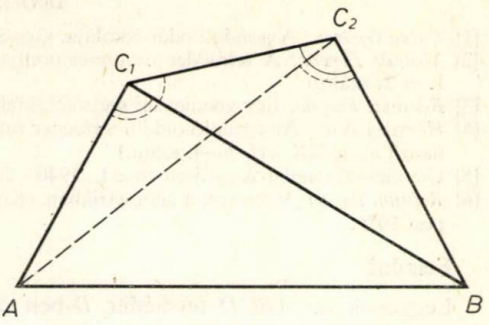
$$\frac{AD^2+BD^2+CD^2}{3} = (R\sqrt{2})^2,$$

ahol R a tetraéder köré írt gömb sugara. A derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel ehhez teljesen hasonló alakban írható:

$$\frac{AC^2+BC^2}{2} = (r\sqrt{2})^2,$$

ahol r a háromszög köré írt kör sugara.

3.3. Vegyük ismét alapul a derékszögű háromszögnek azt a tulajdonságát, hogy a köré írt kör középpontja a háromszög egyik oldalára esik! Analóg alakzatként tekintsük azt a tetraédert, amelynél a köré írt gömb középpontja a tetraéder egyik élén helyezkedik el! Ez az él két derékszögű háromszög közös átfogója. Ha még egy lapot derékszögűnek választunk, akkor bebizonyítható, hogy a negyedik lap is derékszögű háromszög lesz. Az ilyen tetraédert, amelynek minden



lapja derékszögű háromszög, szintén a derékszögű háromszög analóg alakzatának tekinthetjük. Az élek között a következő összefüggéseket találjuk:

$$AC_1^2+BC_1^2 = AB^2,$$

$$AC_2^2+BC_2^2 = AB^2,$$

$$AC_1^2+C_1C_2^2 = AC_2^2,$$

$$C_1C_2^2+BC_2^2 = BC_1^2.$$

E négy egyenlőség közül összeadva az elsőnek és az utolsónak megfelelő oldalait, az egyenlő tagok elhagyása után a következőket kapjuk:

$$AC_1^2+C_1C_2^2+C_2B^2 = AB^2.$$

Ez az összefüggés pedig a Pitagorasz-tétel megfelelőjének tekinthető.

4. A felsoroltak csupán ízelítőt kívántak adni abból a nagyon gazdag ismeretanyagból, amelyet a tetraéderek tanulmányozása nyújthat a tanulóknak. Kevés tanári irányítással, önállóan juthatnak el új összefüggések felismeréséhez, és világosabb lesz előttük a sík és a tér kapcsolata. Élvezhetik a felfedezés örömét és ezzel nagyobb ösztönzést kapnak a matematika elmélyültebb tanulmányozásához. Ez a törekvés egybeesik azzal a célkitűzéssel, amelyet a tanterv így fogalmaz meg: „Az elért eredmény feletti öröm, a siker, a problémák iránti érdeklődés, a dolgok tisztázásának vágya nagyobb ösztönző erő, mint a külső ösztönzők."

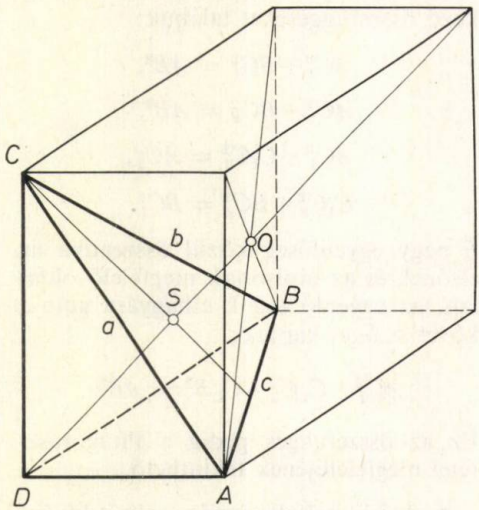
IRODALOM

[1] *Pólya György:* A gondolkodás iskolája. Gondolat, Budapest 1969.
[2] *Molnár Ferenc:* A tetraéder nevezetes pontjairól. (Középiskolai Matematikai Lapok XVI. évf. 1. és 2. szám.)
[3] *Kárteszi Ferenc:* Egy geometriai szélsőértékfeladat. (Matematikai Lapok XVIII. évf. 3—4. szám.)
[4] *Horváth Jenő:* Az egyenlő oldalú tetraéder tulajdonságai állandó görbületű terekben. (Matematikai Lapok XX. évf. 3—4. szám.)
[5] Geometriai feladatok gyűjteménye I., 1940—2020. és 2069—2100. feladatok.
[6] *Reiman István:* Vektorok a geometriában. (Középiskolai szakköri füzet.) Tankönyvkiadó, Budapest 1971.

Feladat

Legyenek az $ABCD$ tetraéder D-ben összefutó élei páronként merőlegesek egymásra! Mi lesz a D csúcs mértani helye, ha az A, B, C csúcsok egy adott r sugarú körön helyezkednek el?

Megoldás: Egészítsük ki a tetraédert téglatestté (lásd az ábrát)! A köré írt gömb sugara a testátló felével lesz egyenlő. Mivel a téglatest három éle azonos a tetraéder három élével, ezért a gömb sugarának négyzete:



$$R^2 = \frac{AD^2 + BD^2 + CD^2}{4}.$$

A téglatest élei kifejezhetők a lapátlókkal, vagyis az ABC háromszög oldalaival:

$$AD^2 + BD^2 + CD^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Ezt behelyettesítve:

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

Felhasználjuk még a következő ismert összefüggést: $a^2 + b^2 + c^2 = 9r^2 - d^2$, ahol d a háromszög magasságpontjának a köré írt kör középpontjától való távolságát jelenti. Így

$$R^2 = \frac{9r^2 - d^2}{8}.$$

Tekintsük most azt az ABC háromszög síkjára merőleges síkot, amely átmegy a háromszög M magasságpontján és a köré írt kör K középpontján! Mivel a tetraéder ortocentrikus, ezért a D csúcs vetülete az M pont lesz. Felhasználva még, hogy a gömb sugara — amely a D-ből indul — átmegy az ABC háromszög súlypontján, és a súlypont harmadolja ezt, az ábrán látható koordináta-rendszerben vizsgáljuk a D pont helyzetének változását:

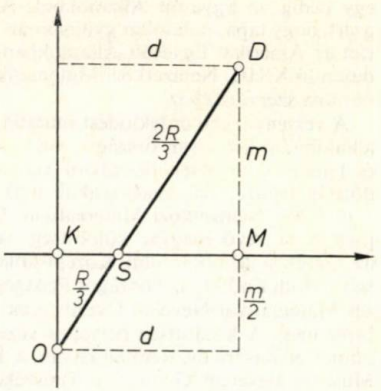
$$d^2 + \frac{9m^2}{4} = R^2,$$

$$d^2 + \frac{9m^2}{4} = \frac{9r^2 - d^2}{8},$$

és ebből rendezéssel a következő egyenlet adódik:

$$\frac{d^2}{r^2}+\frac{m^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$$

Ez ellipszis egyenlete. Ha az M pont egy d sugarú körön mozog, akkor a D pont ugyancsak kört ír le, ezért a mértani hely a kapott ellipszisnek az OK tengely körüli megforgatásával keletkező ellipszoid lesz.



HÓDI ENDRE
osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet

Rövid beszámoló a XXI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

A XXI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát külön erre a célra alakított szervező bizottság rendezte meg Bristolban, Londonban és Oxfordban 1979. június 28—július 9. között.

Ezen a diákolimpián 22 állam képviseltette magát küldöttséggel. A résztvevő államok a jelölésükre használt rövidítések betűrendjében a következők:

Osztrák Köztársaság (A),
Belga Királyság (B),
Bolgár Népköztársaság (BG),
Brazil Szövetségi Köztársaság (BR),
Kubai Köztársaság (C),
Csehszlovák Szocialista Köztársaság (CS),
Német Szövetségi Köztársaság (D),
Német Demokratikus Köztársaság (DDR),
Francia Köztársaság (F),
Nagy-Britannia és Észak-Írország Egyesült Királyság (GB),
Görög Köztársaság (GR),
Magyar Népköztársaság (H),
Izrael Állam (IS),
Holland Királyság (NL),
Lengyel Népköztársaság (PL),
Román Szocialista Köztársaság (R),
Svéd Királyság (S),
Finn Köztársaság (SF),
Szovjet Szocialista Köztársaságok Szövetsége (SU),
Amerikai Egyesült Államok (USA),
Vietnami Szocialista Köztársaság (VN),
Jugoszláv Szocialista Szövetségi Köztársaság (YU).

Egy-egy ország küldöttsége általában 8 tanulóból és 2 felnőtt vezetőből állt. Ebben a tekintetben kivételt képezett Brazília küldöttsége, amelyben csak 5 tanuló; Kuba küldöttsége, amelyben csupán 1 vezető és 4 tanuló; végül Vietnam küldöttsége, amelyben szintén csak 4 tanuló volt. Meg kell továbbá említenünk, hogy versenyen kívül részt vett még egy tanuló a Luxemburgi Nagyhercegségből, így e diákolimpián összesen 166 tanuló mérte össze tudását matematikából. Ez a legnagyobb számarányú részvételt jelentette az eddig megtartott nemzetközi matematikai diákolimpiák történetében. Érdekes, hogy az idei diákolimpiának nem volt leány versenyzője.

Két megfigyelő is jelen volt: egy Ausztráliából,

egy pedig az Egyesült Államokból. Az utóbbi azért, hogy tapasztalatokat gyűjtsön az 1981 nyarán az Amerikai Egyesült Államokban megrendezendő XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia szervezéséhez.

A verseny iránti érdeklődést mutatja, hogy ez alkalommal két olyan ország is volt — Brazília és Izrael —, amelyekből először vett részt küldöttség nemzetközi matematikai diákolimpián.

A XXI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián részt vevő magyar küldöttség vezetésével az Oktatási Minisztérium Középiskolai Főosztálya Hódi Endrét, az Országos Pedagógiai Intézet Matematikai Nevelési Osztályának vezetőjét bízta meg. A küldöttség helyettes vezetői teendőinek ellátására dr. Reiman István, a Budapesti Műszaki Egyetem Geometria Tanszékének docense kapott megbízást. Hivatalos megfigyelőként részt vett a diákolimpián — az Oktatási Minisztérium költségén — Csirmaz László, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének tudományos munkatársa, akit a vendéglátók — közös megegyezés alapján — a magyar tanulókkal együtt szállásoltak el; ő a diákolimpia egész tartama alatt a tanulók programjában vett részt, kivéve természetesen a versenydolgozatok írását.

A diákolimpián magyar részről jelen volt még dr. Fried Ervinné, a Középiskolai Matematikai Lapok felelős szerkesztője.

A magyar versenyzőket dr. Reiman István készítette fel a diákolimpiára; ebben a munkájában Csirmaz László segített neki. Bizonyos mértékű hozzájárulást jelentettek a vidéki, ún. olimpiai felkészítő szakkörök foglalkozásai is. A tanulók kiválasztását Hódi Endre, dr. Reiman István és Csirmaz László végezte. Ennek értelmében a XXI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián a következő tanulók képviselték hazánkat (zárójelben a rövidítésükre használt jelölések):

Bohus Géza, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium III. osztályos tanulója (H 1);
Erdélyi Tamás, a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 2);
Kiss György, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium III. osztályos tanulója (H 3);
Nagy Gábor, a székesfehérvári Teleki Blanka Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 4);
Hajnal Péter, a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 5);

Szegedy Márió, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 6);
Tardos Gábor, a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium I. osztályos tanulója (H 7);
Umann Gábor, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium III. osztályos tanulója (H 8).

Az osztályok megjelölése az 1978—79. tanévre vonatkozik.

A diákolimpia szervező bizottságához 19 országból összesen 80 feladatjavaslat érkezett. Közöttük volt az az 5 is, amelyet magyar részről terjesztettek be. Ezek a feladatok rendre Beck Józseftől, Hódi Endrétől, Lempert Lászlótól, Pálfy Péter Páltól és Ury Lászlótól származtak, magyar szövegüket Hódi Endre fordította németre.

Az angol feladatkiválasztó bizottság a beküldött javaslatok közül 26-ot nyújtott át a nemzetközi zsüri tagjainak. A zsüritagok ezeknek a feladatoknak a szövegét a diákolimpia valamennyi hivatalos nyelvén (angol, francia, német, orosz) megkapták, megoldásukat azonban csak azon a (hivatalos) nyelven, amelyen a javaslattevők fogalmazták meg.

A zsüri ezután ebből a 26 javaslatból választotta ki kétnapos közös munkával a versenyen kitűzött 3—3 feladatot: döntése értelmében az első versenynapra, július 2-ra olyan három feladatot tűztek ki, amelyek rendre az NSZK-beli, a bolgár és a szovjet küldöttség javaslatai közül valók voltak, és hibátlan megoldásukkal a tanulók sorjában 6, 7, illetve 7 pontot szerezhettek.

A második versenynap (július 3.) feladatait rendre az amerikai, az izraeli és az NSZK-beli küldöttség terjesztette be; kifogástalan megoldásukért sorjában ismét 6, 7 és 7 pont járt.

A feladatok megoldásához mindkét napon 4—4 óra állt a versenyzők rendelkezésére. Munkájukhoz semmilyen segédeszközt nem vehettek igénybe, zsebszámológépet sem.

A kitűzött versenyfeladatok magyar szövege a következő:

Első nap

1. Legyenek p és q olyan természetes számok, amelyekre fennáll, hogy

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bizonyítsa be, hogy p osztható 1979-cel!

2. Adva van egy ötoldalú hasáb: alaplapja az $A_1A_2A_3A_4A_5$, fedőlapja pedig a $B_1B_2B_3B_4B_5$ ötszög. E két ötszög mindegyik oldalát, továbbá valamennyi A_iB_j szakaszt ($i, j = 1, 2, \ldots, 5$) vörösre vagy zöldre színezzük. Minden olyan háromszögnek, amelynek csúcsai egyúttal a hasáb csúcspontjai is, és amelynek mindegyik oldala színezett, van két különböző színű oldala.

Mutassa meg, hogy ekkor az alaplapnak és a fedőlapnak összesen tíz oldala mind egyforma színű!

3. Adva van a síkban két egymást metsző körvonal: k_1 és k_2. Jelölje A a két metszéspont egyikét! Két tömegpont: P_1 és P_2 mozog k_1-en, illetve k_2-n állandó sebességgel ugyanabban a forgási irányban. Mozgásukat egy időben kezdik az A pontban és egy-egy körüljárás után ismét egyidejűleg érkeznek az A pontba.

Bizonyítsa be, hogy van a síkban olyan rögzített P pont, amelyre a mozgás minden időpontjában érvényes a

$$PP_1 = PP_2$$

egyenlőség!

Második nap

4. Adva van a π síkban egy P és a π síkon kívül egy Q pont.

Határozza meg a π síknak valamennyi olyan R pontját, amelyre a

$$\frac{QP + PR}{QR}$$

hányados értéke maximális!

5. Határozza meg az összes a valós számot, amelyekhez léteznek a

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3$$

egyenlőségeket kielégítő x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5 nemnegatív valós számok!

6. Legyen A és E egy szabályos nyolcszög két átellenes csúcsa! Egy béka az A csúcsból kiindulva kezd ugrálni. A nyolcszög bármely csúcsából — az E-t kivéve — a mellete levő egyik csúcsba ugorhat. Ha az E csúcsba ér, akkor megáll és ott marad. Legyen a_n a pontosan n ugrásból álló különböző utak száma!

Bizonyítsa be, hogy $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; ahol $x = 2 + \sqrt{2}$ és $y = 2 - \sqrt{2}$.

Megjegyzés: Egy pontosan n ugrásból álló út a csúcsoknak olyan $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sorozata, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

I. $P_0 = A$, $P_n = E$;

II. minden, a $0 \leqq i \leqq n-1$ egyenlőtlenséget kielégítő i-re P_i különbözik E-től;

III. minden, a $0 \leqq i \leqq n-1$ egyenlőtlenséget kielégítő i-re P_i és P_{i+1} szomszédos csúcsok.

*

Első táblázatunk azt tünteti fel, hogy a magyar versenyzők hány pontot értek el az egyes feladatok megoldásában.

A tanuló	1.	2.	3.	4.	5.	6.	összes pontjának száma
	feladatban elért pontjainak száma						
H 1	0	0	7	6	1	1	15
H 2	6	0	1	5	5	3	20
H 3	0	3	0	5	5	3	16
H 4	0	0	7	5	2	4	18
H 5	0	7	7	6	7	7	34
H 6	0	0	7	6	2	7	22
H 7	0	7	0	6	0	4	17
H 8	0	7	7	6	7	7	34
Összesen:	6	24	36	45	29	36	176

A verseny valamennyi résztvevője által elért összpontszámokat második táblázatunk tartalmazza.

Sorszám	Az állam jele	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Valamennyi	Helyezés
		tanuló együttes pontszáma									
1.	A	20	23	13	16	21	15	19	25	152	12.
2.	B	3	3	22	6	2	6	7	17	66	19.
3.	BG	9	20	23	16	24	23	13	22	150	13.
4.	BR	5	5	2	4	3	—	—	—	19	22.
5.	C	10	5	11	9	—	—	—	—	35	21.
6.	CS	16	20	24	17	23	40	12	26	178	7.
7.	D	21	14	35	33	39	30	34	29	235	3.
8.	DDR	33	13	31	20	19	19	26	19	180	6.
9.	F	14	12	15	19	37	11	28	19	155	11.
10.	GB	23	23	34	30	32	34	21	21	218	4.
11.	GR	6	2	7	6	7	5	3	21	57	20.
12.	H	15	20	16	18	34	22	17	34	176	8.
13.	IS	13	4	28	16	11	20	12	15	119	17.
14.	NL	22	10	17	18	11	8	11	33	130	16.
15.	PL	13	9	8	24	21	29	29	27	160	10.
16.	R	35	23	17	33	32	28	39	33	240	2.
17.	S	14	10	17	29	13	22	9	29	143	14.
18.	SF	16	18	14	1	4	6	7	23	89	18.
19.	SU	19	27	35	34	36	40	36	40	267	1.
20.	USA	17	9	27	17	39	24	32	34	199	5.
21.	VN	32	29	33	40	—	—	—	—	134	15.
22.	YU	13	27	13	11	23	26	24	35	172	9.

A díjak odaítélésére vonatkozólag a zsüri szótöbbséggel a következő határozatot fogadta el:

I. díjat kapnak azok a versenyzők, akik legalább 37 pontot szereztek;

II. díjasok lesznek azok, akiknek összes pontszáma legalább 29, legfeljebb pedig 36; végül

III. díjban részesülnek azok a tanulók, akik legalább 20, legfeljebb azonban 28 pontot értek el.

A zsürinek e döntése alapján 8 versenyző kapott I. díjat, 32 II. díjat és 42 III. díjat.

A II. díjasok között szerepelt 34—34 pontjával a magyar Hajnal Péter és Umann Gábor, míg ugyancsak két magyar versenyző részesült III. díjban: a 22 pontos Szegedy Márió és a 20 pontos Erdélyi Tamás.

Alábbi harmadik táblázatunk azt tünteti fel, hogy hogyan oszlottak meg a díjak a résztvevő államok küldöttségei között:

Sorszám	Az állam jele	I.	II.	III.	Valamennyi	Helyezés
		díj száma				
1.	A	0	0	4	4	16.
2.	B	0	0	1	1	18—20.
3.	BG	0	0	5	5	15.
4.	BR	0	0	0	0	21—22.
5.	C	0	0	0	0	21—22.
6.	CS	1	0	4	5	6.

7.	D	1	5	1	7	2.
8.	DDR	0	2	2	4	10—11.
9.	F	1	0	1	2	7.
10.	GB	0	4	4	8	8.
11.	GR	0	0	1	1	18—20.
12.	H	0	2	2	4	10—11.
13.	IS	0	0	2	2	17.
14.	NL	0	1	1	2	14.
15.	PL	0	2	3	5	9.
16.	R	1	4	2	7	3.
17.	S	0	2	1	3	12.
18.	SF	0	0	1	1	18—20.
19.	SU	2	4	1	7	1.
20.	USA	1	2	2	5	5.
21.	VN	1	3	0	4	4.
22.	YU	0	1	4	5	13.

Ezenkívül a zsüri különdíjban részesített egy vietnami versenyzőt a 3. feladatra adott igen rövid és elegáns megoldásáért.

A díjakat a Gloucester-i hercegné osztotta ki a londoni Berridge Hallban július 7-én délelőtt megtartott záróünnepélyen.

DR. KELEMEN JÓZSEF
egyetemi adjunktus
Miskolc, NME

A Hérón-féle háromszögekről

Definíció

Hérón-féle háromszögnek, röviden H-háromszögnek nevezzük az olyan háromszöget, amelynek oldalai és területe természetes számok.

1. *segédtétel*

Bármely H-háromszög kerülete páros szám.

Bizonyítás

Jelölje a H-háromszög oldalait a, b, c, és tegyük fel, hogy $a+b+c$ páratlan! Ekkor

$$b+c-a = (a+b+c)-2a,$$

$$a+c-b = (a+b+c)-2b,$$

$$a+b-c = (a+b+c)-2c$$

is páratlanok, hiszen mindhárom szám egy páratlan és egy páros szám különbségeként állítható elő. Ha a háromszög területét t jelöli, akkor a Hérón-féle területképlet szerint

$$t^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16},$$

vagyis t^2 nem egész szám, mivel a számlálóban négy páratlan szám szorzata áll. Ez azonban ellentmond annak, hogy a H-háromszög területe (s így t^2 is) természetes szám, $a+b+c$ tehát páros.

Következmény

Ha a H-háromszög kerületének felét s jelöli, akkor s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ természetes számok.

2. *segédtétel*

Ha α, m, n, k természetes számok és 2^α az

$$(m-n)(k^2+mn), \quad m(k^2+n^2), \quad n(k^2+m^2)$$

számok közös osztója, akkor

$$kmn(m-n)(k^2+mn)$$

osztható 4^α-nal.

Bizonyítás

Az alábbi esetek lehetségesek:

	m	n	k
1.	páratlan	páratlan	páratlan
2.	páratlan	páratlan	páros
3.	páratlan	páros	páratlan
4.	páros	páratlan	páratlan
5.	páros	páros	páratlan
6.	páros	páratlan	páros
7.	páratlan	páros	páros
8.	páros	páros	páros

Az 1. esetben k^2+m^2 két páratlan szám négyzetösszege, vagyis 4-gyel nem osztható páros szám, ezért $\alpha=1$. Mivel $m-n$ és k^2+mn párosak, azért $(m-n)(k^2+mn)$ osztható 4-gyel.

A 2. és 3. esetben $m(k^2+n^2)$, a 4. esetben $n(k^2+m^2)$ páratlan, ezek az esetek tehát nem jöhetnek szóba.

Az 5. esetben k^2+n^2 és k^2+m^2 páratlan, tehát m is, n is osztható 2^α-nal, ezért mn osztható 4^α-nal.

A 6. esetben $m-n$ és k^2+n^2 páratlan, tehát k^2+mn és m oszthatók 2^α-nal, $m(k^2+mn)$ pedig 4^α-nal.

A 7. esetben $m-n$ és k^2+m^2 páratlan, tehát k^2+mn és n oszthatók 2^α-nal, $n(k^2+mn)$ pedig 4^α-nal.

A 8. esetben legyen

$$m_1 = \frac{m}{2^\beta}, \quad n_1 = \frac{n}{2^\beta}, \quad k_1 = \frac{k}{2^\beta},$$

ahol β olyan természetes szám, hogy m_1, n_1, k_1 is természetes számok és legalább egyikük páratlan. Ekkor

$$kmn(m-n)(k^2+mn) = 4^{3\beta} k_1 m_1 n_1 (m_1-n_1)(k_1^2+m_1 n_1).$$

Ha $\alpha \leqq 3\beta$, akkor állításunk igaz. Ha $\alpha > 3\beta$, akkor egyrészt $\alpha - 3\beta = \alpha_1$ természetes szám, másrészt állításunk az alábbiak szerint fogalmazható át:

Ha α_1, m_1, n_1, k_1 természetes számok és 2^{α_1} az

$$(m_1-n_1)(k_1^2+m_1 n_1), \quad m_1(k_1^2+n_1^2), \quad n_1(k_1^2+m_1^2)$$

számok közös osztója, akkor

$$k_1 m_1 n_1 (m_1-n_1)(k_1^2+m_1 n_1)$$

osztható 4^{α_1}-nel. Mivel m_1, n_1, k_1 közül legalább az egyik páratlan, azért a bizonyítás az első hét esethez hasonlóan történik.

3. *segédtétel*

Ha d, m, n, k természetes számok és d az

$$(m-n)(k^2+mn), \quad m(k^2+n^2), \quad n(k^2+m^2)$$

számok közös osztója, akkor

$$kmn(m-n)(k^2+mn)$$

osztható d^2-nal.

Bizonyítás

Legyen $d=2^x d_1$, ahol d_1 páratlan természetes szám!

Mivel 2^x és d_1 legnagyobb közös osztója 1, azért a **2.** segédtétel alapján elegendő annyit igazolni, hogy $kmn(m-n)(k^2+mn)$ osztható d_1^2-nal.

Az

$$(m-n)(k^2+mn)-m(k^2+n^2)+n(k^2+m^2) = 2mn(m-n),$$

$$(m-n)(k^2+mn)+m(k^2+n^2)-n(k^2+m^2) = 2k^2(m-n),$$

$$(m-n)(k^2+mn)+m(k^2+n^2)+n(k^2+m^2) = 2m(k^2+mn),$$

$$-(m-n)(k^2+mn)+m(k^2+n^2)+n(k^2+m^2) = 2n(k^2+mn)$$

számok, mint az $(m-n)(k^2+mn)$, $m(k^2+n^2)$, $n(k^2+m^2)$ számokból alkotott összeg, illetve különbség, oszthatók d_1-gyel. De d_1 páratlan, ezért $mn(m-n)$, $k^2(m-n)$, $m(k^2+mn)$, $n(k^2+mn)$ is oszthatók d_1-gyel, a négy szám

$$k^2m^2n^2(m-n)^2(k^2+mn)^2$$

szorzata pedig d_1^4-nel. Ez viszont már állításunkat jelenti.

Tétel

Egy háromszög akkor és csak akkor H-háromszög, ha oldalai

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{d}(m-n)(k^2+mn), \\ b = \dfrac{1}{d}m(k^2+n^2), \\ c = \dfrac{1}{d}n(k^2+m^2) \end{cases}$$

alakban állíthatók elő, ahol d, m, n, k természetes számok, $m>n$, d pedig az $(m-n)(k^2+mn)$, $m(k^2+n^2)$, $n(k^2+m^2)$ számok közös osztója.

Bizonyítás

A feltétel szükséges

Tegyük fel, hogy a, b, c egy H-háromszög oldalai. A Hérón-féle területképlet felhasználásával egyszerű számolással igazolhatók az

$$\begin{cases} a = \dfrac{[s(s-b)-(s-a)(s-b)][t^2+s(s-a)(s-b)^2]}{as(s-a)(s-b)^2}, \\ b = \dfrac{s(s-b)[t^2+(s-a)^2(s-b)^2]}{as(s-a)(s-b)^2}, \\ c = \dfrac{(s-a)(s-b)[t^2+s^2(s-b)^2]}{as(s-a)(s-b)^2} \end{cases}$$

összefüggések. Ezek az összefüggések a

$$\begin{cases} t = k, \\ s(s-b) = m, \\ (s-a)(s-b) = n, \\ as(s-a)(s-b)^2 = d \end{cases}$$

jelölésekkel az (1) egyenleteket adják. Az m, n, d számok az **1.** segédtétel szerint, k pedig azért természetes szám, mert egy H-háromszög területe. Mivel a, b, c természetes számok, azért d az $(m-n)(k^2+mn)$, $m(k^2+n^2)$, $n(k^2+m^2)$ számok közös osztója.

A feltétel elegendő

Tegyük fel, hogy az a, b, c számhármast az (1) egyenletek állítják elő a megadott feltételek mellett! Ekkor egyrészt a, b, c természetes számok, másrészt

$$b+c-a = \frac{1}{d}2n(k^2+mn) > 0,$$

$$a+c-b = \frac{1}{d}2mn(m-n) > 0,$$

$$a+b-c = \frac{1}{d}k^2(m-n) > 0,$$

teljesülnek tehát a háromszög-egyenlőtlenségek, ezért a, b, c egy háromszög oldalai. Az

$$s-a = \frac{1}{d}n(k^2+mn),$$

$$s-b = \frac{1}{d}mn(m-n),$$

$$s-c = \frac{1}{d}k^2(m-n),$$

$$s = \frac{1}{d}m(k^2+mn)$$

összefüggések és a Hérón-képlet alapján a háromszög területe:

$$t = \frac{1}{d^2}kmn(m-n)(k^2+mn),$$

a **3.** segédtétel alapján t természetes szám, az a, b, c oldalak tehát H-háromszöget határoznak meg.

Definíció

Egy H-háromszöget primitív H-háromszögnek nevezünk, ha oldalai relatív prímek:

$$(a, b, c) = 1.$$

E definíció és a *tétel* szerint az összes primitív H-háromszög úgy állítható elő, hogy az (1) egyenletekben az $(m-n)(k^2+mn)$, $m(k^2+n^2)$, $n(k^2+m^2)$ számok legnagyobb közös osztóját választjuk d-nek. Azt is előírhatjuk, hogy az m, n, k számok relatív prímek legyenek:

$$(m, n, k) = 1.$$

Ha ugyanis $(m, n, k)=d_2>1$, és $m=m_2d_2$, $n=n_2d_2$, $k=k_2d_2$, ahol m_2, n_2, k_2, d_2 természetes számok, akkor (1) szerint

$$\begin{cases} a = \dfrac{d_2^3}{d}(m_2-n_2)(k_2^2+m_2n_2), \\ b = \dfrac{d_2^3}{d}m_2(k_2^2+n_2^2), \\ c = \dfrac{d_2^3}{d}n_2(k_2^2+m_2^2). \end{cases}$$

Mivel az a, b, c számoknak legnagyobb közös osztója 1, azért d-nek oszthatónak kell lennie d_2^3-nal. Ha $d=d_3d_2^3$, ahol d_3 természetes szám, akkor

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{d_3}(m_2-n_2)(k_2^2+m_2n_2), \\ b = \dfrac{1}{d_3}m_2(k_2^2+n_2^2), \\ c = \dfrac{1}{d_3}n_2(k_2^2+m_2^2), \end{cases}$$

vagyis az (1) egyenletekhez jutottunk, és itt már $(m_2, n_2, k_2)=1$.

Ha azt is előírjuk, hogy

$$a \leqq b \leqq c$$

legyen, akkor az

$$a-b = \frac{1}{d}n(m^2-k^2-2mn) \leqq 0,$$

$$b-c = \frac{1}{d}(m-n)(k^2-mn) \leqq 0$$

összefüggések alapján

$$n \geqq \frac{m^2-k^2}{2m} \quad \text{és} \quad n \geqq \frac{k^2}{m}.$$

Az $n \geqq \dfrac{k^2}{m}$ és az $m>n$ egyenlőtlenségek csak akkor állhatnak fenn egyidejűleg, ha $m>k$.

Befejezésül egy táblázatot közlünk a következő oldalon, amely néhány primitív H-háromszöget tartalmaz.

A táblázat folytatásával minden primitív H-háromszög előállítható.

IRODALOM

[1] VADKERTY TIBOR—HÓDI ENDRE: *A Hérón-féle háromszögekről.* (A Matematika Tanítása, 1979. április.)

m	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5
k	1	2	1	3	2	1	1	4	3	3	3	2	2	1	1
$\frac{m^2-k^2}{2m}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$
$\frac{k^2}{m}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
n	1	2	2	3	3	3	2	4	4	3	2	4	3	4	3
(m, n, k)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(m-n)\cdot(k^2+mn)$	3	10	7	21	16	13	18	36	29	48	57	24	38	21	32
$m(k^2+n^2)$	4	24	15	72	52	40	20	160	125	90	65	100	65	85	50
$n(k^2+m^2)$	5	26	20	75	60	51	34	164	136	102	68	116	87	104	78
d	1	2	1	3	4	1	2	4	1	2	1	4	1	1	2
a	3	5	7	7	4	13	9	9	29	24	57	6	38	21	16
b	4	12	15	24	13	40	10	40	125	45	65	25	65	85	25
c	5	13	20	25	15	51	17	41	136	51	68	29	87	104	39
s	6	15	21	28	16	52	18	45	145	60	95	30	95	105	40
$s-a$	3	10	14	21	12	39	9	36	116	36	38	24	57	84	24
$s-b$	2	3	6	4	3	12	8	5	20	15	30	5	30	20	15
$s-c$	1	2	1	3	1	1	1	4	9	9	27	1	8	1	1
t	6	30	42	84	24	156	36	180	1740	540	1710	60	1140	420	120

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Villányi út 74. IV. 23. 1113. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is! Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

915. Oldjuk meg a

$$\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)=\left[\left\{\frac{2}{\pi}x\right\}\cdot 8-4\right]$$

egyenletet, ha $\{u\}$ az u törtrészét, $[u]$ pedig az u egészrészét jelenti!

916. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{n}$$

egyenlőtlenség!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

917. Van-e olyan pozitív egész számokból álló (x, y, u, v) számnégyes, amely kielégíti az $x^2+y^2=3(u^2+v^2)$ egyenletet?

918. Kössük össze az $ABCD$ négyzet belsejében levő, de az átlókra nem illeszkedő P pontot a csúcsokkal. A négy egyenes mindegyike egy-egy pontban metszi a két szemközti oldalegyenest. Írjuk fel a nyolc metszéspont osztóviszonyát az AB, BC, CD, illetve DA pontpárra vonatkozólag. Mekkora a nyolc osztóviszony szorzata?

Fitos László, Nyíregyháza

919. Adott körszeletben szerkesszük meg a legnagyobb területű téglalapot úgy, hogy egyik oldala a körszelet húrján legyen, a másik két csúcsa pedig illeszkedjék a körszeletet határoló körívre!

920. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adva van a beírt kör sugara, továbbá az egyik csúcsából induló magasságszakasz és súlyvonalszakasz!

Kőváry Károly, Budapest

Feladatmegoldások (903—908.)

903. Mutassuk meg, hogy az

$$x-\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-\sqrt{y}+y=0 \tag{1}$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazában!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

I. megoldás: Az egyik változó helyébe 0-t írva nem kapunk végtelen sok megoldást. Keressünk pozitív négyzetszám megoldásokat! Vezessük be a pozitív (a, b) új változókat: $x=a^2$, $y=b^2$, és keressük végtelen sok pozitív egész megoldását az

$$a^2-a-2ab-b+b^2=0, \quad \text{azaz az} \tag{2}$$

$$a^2-(1+2b)a+b^2-b=0 \tag{3}$$

egyenletnek. Tegyük fel, hogy az (a_0, b_0) pozitív egész számokból álló számpár kielégíti (3)-at. Akkor igaz az

$$a_0=\frac{1+2b_0\pm\sqrt{8b_0+1}}{2} \tag{4}$$

diszjunkció, és ebből következik, hogy $\sqrt{8b_0+1}$ — mint a $2a_0$ és $2b_0+1$ számok valamilyen sorrendben vett különbsége — pozitív páratlan szám. Ezért valamilyen $c>1$ egész számmal teljesül a

$$\sqrt{8b_0+1}=2c-1, \quad \text{majd a} \tag{5}$$

$$8b_0+1=(2c-1)^2, \quad \text{azaz a}$$

$$b_0=\frac{c(c-1)}{2} \tag{6}$$

egyenlet.

Fordítsuk meg a gondolatmenetet! Ha c tetszőleges 1-nél nagyobb egész szám, akkor $c(c-1)$ pozitív páros szám, tehát egy b_0 pozitív egésszel teljesül (6), majd ezekkel az (5) is. Próbálkozzunk az ezek felhasználásával (4)-ből nyert egyik értékkel, az $a_0=b_0+c$, azaz az

$$a_0 = \frac{(c+1)c}{2}$$

pozitív egész számmal. A (2)-be való behelyettesítés mutatja, hogy a

$$\left(\binom{c+1}{2}; \binom{c}{2}\right)$$

számpár megoldás, tehát az (1)-nek a

(7) $$\left(\binom{c+1}{2}^2; \binom{c}{2}^2\right)$$

pozitív egész számpárral — a c-t végigfuttatva az 1-nél nagyobb egész számokon — végtelen sok, természetes számokból álló megoldását adtuk meg. (Nincs köztük megegyező, mert c nagyobb értékénél (7)-nek mindkét eleme növekszik.)

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely és
Polcz Katalin, Pécs

II. megoldás: Az (1) egyenlettel ekvivalens a

(8) $$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

egyenlet. Próbáljunk meg végtelen sok megoldáshoz jutni azáltal, hogy x-et is, y-t is ugyanazzal a paraméterrel állítjuk elő. Tegyük fel, hogy a pozitív egész számokból álló (x_0, y_0) számpár megoldása (8)-nak, ahol $x_0 \geqq y_0$. Akkor igaz a

(9) $$\sqrt{x_0}-\sqrt{y_0} = t_0 \wedge \sqrt{x_0}+\sqrt{y_0} = t_0^2$$

konjunkció valamilyen nemnegatív t_0 paraméterértékkel. (Eljuthatunk a (9)-hez azzal a sokszor használható ötlettel is, hogy — miután az $x_0=y_0$ feltevés ellentmondáshoz vezet — a pozitív $\sqrt{x_0}-\sqrt{y_0}$ számmal osztva (8) mindkét oldalát hányadosokat állítunk elő:

$$\sqrt{x_0}-\sqrt{y_0} = \frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}-\sqrt{y_0}},$$

és a két kifejezés közös értékét vesszük paraméterértéknek.)
A (9)-ből felírt

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} = t$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = t^2$$

egyenletrendszer azt kínálja, hogy oldjuk meg (x, y)-ra. Az összeadással, illetve kivonással nyert

(10) $$\sqrt{x} = \frac{t^2+t}{2}, \quad \sqrt{y} = \frac{t^2-t}{2}$$

egyenletek törtjeiben a számlálók $t(t+1)$, illetve $t(t-1)$ alakja azt az ötletet adja, hogy induljunk el visszafelé. Futtassuk végig a t változót az 1-nél nagyobb egész számok növekvő sorozatán. Akkor a (10) alatti törtek értéke egész szám, és (x, y)-ra a

$$\left(\binom{t+1}{2}^2, \binom{t}{2}^2\right)$$

pozitív egész számokból álló számpárt kapjuk belőlük. Ilyen úton is az *I. megoldás* számpárjaihoz jutottunk.

Csúri József, Szeged és
Szilágyi István, Esztergom

I. megjegyzés: Bartha Gábor és Kacsó Ferenc kimutatta, hogy (1)-nek négyzetszámokból álló megoldásokon kívül nem is lehet más természetes szám megoldása.

II. megjegyzés: Hasonló módon be lehet látni, hogy az

$$(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y})^k=\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazában, ahol k és n pozitív egész szám.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 39.

904. Leírtuk az 10100001000000000 kezdetű egymillió jegyű kettes számrendszerbeli természetes számot: a k-adik 1-es számjegy után k^2 számú 0 áll, és ezt követi a $(k+1)$-edik 1-es, ameddig a szám végére nem érünk (k pozitív egész szám). Hány 1-es jegyet írtunk le? Hányadik helyen áll az utolsó 1-es?

Zsilinszky László, Érsekújvár

Megoldás: Ha a jegyek számát nem korlátozzuk, akkor a feltételek szerint

az 1. 1-es leírása után ki van töltve	1 hely,
a 2. 1-es leírása után ki van töltve	$1+1+1$ hely,
a 3. 1-es leírása után ki van töltve	$1+1+1+4+1$ hely,
a 4. 1-es leírása után ki van töltve	$1+1+1+4+1+9+1$ hely,
.	.
.	.
.	.
a k. 1-es leírása után ki van töltve	$k+1^2+2^2+3^2+\ldots+(k-1)^2$ hely.

A négyzetszámok összegére vonatkozó ismert tétellel az utolsó kifejezésre a

$$\frac{k((k-1)(2k-1)+6)}{6}$$

zárt alakot kaphatjuk.

Az adott szám egymillió jegyű. Azt a legnagyobb pozitív egész k számot keressük, amelyre a

$$\frac{k((k-1)(2k-1)+6)}{6}\leqq 10^6 \tag{1}$$

egyenlőtlenség teljesül. (Az = jel esetleges érvényességére is számítanunk kell!) Az adott szám szerkezete miatt biztos, hogy egyetlen ilyen k létezik.

Próbálgatással — aminél például a felező módszert alkalmazhatjuk — (1)-ből ezt kapjuk:

$k=144$-nél: $\quad 985\,128\leqq 10^6$,
$k=145$-nél: $\quad 1\,005\,865\leqq 10^6$.

Az első igaz, a második hamis logikai értékű ítélet.

Eszerint 144 darab 1-est írtunk le, és az utolsó 1-es a 985 128. helyen áll.

Gőgh József, Gúta
Ihász László, Nagybajom és
Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya

Megjegyzés: A feladat szövegének „ameddig a szám végére nem érünk" kitételét úgy is lehet érteni, hogy a számban az utolsó 0-s jegycsoport sem lehet csonka. Ez esetben ilyen egymillió jegyű szám nem létezik.

Kiss Margit, Pécel

A megoldók száma: 33.

905. Igazoljuk, hogy az

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{ha } n=1,\\ 5, & \text{ha } n=2,\\ 6a_{n-1}-a_{n-2}, & \text{ha } n>2\end{cases} \tag{1}$$

sorozat bármelyik elemére $\sqrt{2a_n^2-1}$ egész szám!

Appel György, Budapest

Megoldás: Először explicit előállítást keresünk a rekurzív definícióval adott sorozatra. Sok esetben eredményre vezet a következő ötletes gondolatmenet:

α) Az adott sorozat elemeit fogjuk fel egy 0 körüli hatványsor együtthatóinak:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{2}$$

(x valós változó). Ennek kedvéért az (1)-et alakítsuk át így:

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{ha } n=0,\\ 5, & \text{ha } n=1,\\ 6a_{n-1}-a_{n-2}, & \text{ha } n>1.\end{cases} \tag{1*}$$

Ismert tétel, hogy a (2) hatványsor tetszőleges a_i együtthatók esetén vagy csak a 0 pontban konvergens, vagy egy $(-r, r)$ $(r>0)$ intervallum belsejében, de azon kívül nem (a $-r, r$ pontokban lehet konvergens is, divergens is), vagy pedig minden valós x-re konvergens. A három esetet szokás így összefoglalni: a (2) hatványsornak r sugarú konvergencia-intervalluma van 0 középponttal, ahol r nulla, pozitív szám, vagy végtelen. Az $r\neq 0$ esetben a konvergencia-intervallum minden belső x pontjához a $\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ érték tartozik; az így meghatározott

$$x\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$$

függvényt az (a_n) sorozat generátorfüggvényének nevezzük. Esetleg értelmezési tartományul a konvergencia-intervallumnak csak egy nem üres részhalmazát vesszük.

β) A (2) alatti szerkezetű hatványsor formálisan előállhat polinomokon végrehajtott osztási algoritmus alkalmazásakor, ha különös módon minden lépésben a legalacsonyabb fokú tagokat vizsgáljuk a legmagasabb fokúak helyett.

Például:

$$\begin{array}{l}(2-3x)\ (1+2x-x^2)\quad (2-7x+16x^2-39x^3+\ldots)\\ \underline{\pm 2\pm 4x\mp 2x^2}\\ \quad -7x+\ 2x^2\\ \quad \underline{\mp 7x\mp 14x^2\pm 7x^3}\\ \qquad\quad 16x^2-\ 7x^3\\ \qquad\quad \underline{\pm 16x^2\pm 32x^3\mp 16x^4}\\ \qquad\qquad -39x^3+16x^4\\ \qquad\qquad \ldots\end{array}$$

(Érdekes ellenőrzésül „megszorozni" az $1+2x-x^2$ polinomot az eredményül kapott „végtelen polinommal".)

γ) Keressünk tehát két polinomot, amelyekre az előbb bemutatott algoritmus az (1*) együtthatójú (2) hatványsort adja.

δ) Ha találunk ilyen polinompárt, akkor a hányadosukat parciális törtekre bontással fogjuk hatványsorba fejteni, és ezt fogjuk egyeztetni a (2)-vel.

ε) A nyert explicit alakról bizonyítani fogjuk, hogy eleget tesz az (1) definíciónak.

A vázolt α)—ε) programnak megfelelően tegyük fel, hogy a

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m;\quad c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$$

polinompár olyan, hogy a másodikat (2)-vel „szorozva" az elsőt kapjuk. Kézenfekvő ezt így érteni:

$$\begin{aligned} a_0c_0&=b_0,\\ a_1c_0+a_0c_1&=b_1,\\ a_2c_0+a_1c_1+a_0c_2&=b_2,\ \ldots.\end{aligned} \tag{3}$$

Az (1*)-ból adódó $a_2=6a_1-a_0$ egyenletet

$$a_2-6a_1+a_0=0$$

alakban írva próbáljuk meg azonosítani a (3) alatti harmadik egyenlettel:

$$c_0=1,\quad c_1=-6,\quad c_2=1,\quad b_2=0.$$

Ezekkel és a_0, a_1 ismert értékeivel a (3) alatti első két egyenlet a $b_0=1$, $b_1=-1$ értékeket szolgáltatja.

Próbáljuk meg ezek után a (2)-t az

$$x \mapsto \frac{1-x}{1-6x+x^2}$$

függvény hatványsorának tekinteni.

Bontsuk a törtet parciális törtekre! A nevező zérushelyei: $x_{1,2}=3\pm\sqrt{8}$. Keresünk olyan A és B számokat, hogy az

$$\frac{1-x}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2} \tag{4}$$

egyenlet azonosság legyen (x_1 és x_2 kivételével minden x-re teljesüljön). A jobb oldalt összevonva egy törtté, a számláló polinomok tagról-tagra való egyeztetése az $A+B=-1$, $Ax_2+Bx_1=-1$ egyenletrendszert adja. Megoldása:

$$A=-\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad B=-\frac{2-\sqrt{2}}{4}. \tag{5}$$

Most a (4) jobb oldalán levő törteket egy-egy végtelen mértani sor segítségével így állítjuk elő:

$$\frac{A}{x-x_1} = \left(-\frac{A}{x_1}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} = -\frac{A}{x_1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^i, \tag{6}$$

ez a sorfejtés akkor és csak akkor érvényes, ha $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$, azaz ha $|x|<|x_1|=3+\sqrt{8}$;

$$\frac{B}{x-x_2} = \left(-\frac{B}{x_2}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}} = -\frac{B}{x_2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^i, \tag{7}$$

ez pedig éppen akkor, ha $|x|<3-\sqrt{8}$; mindkét sorfejtés érvényes, ha $|x|<3-\sqrt{8}$.

Ismeretes, hogy a $(-x_2, x_2)$ intervallum minden belső pontjában mindkét hatványsor abszolút konvergens, ezért (6) és (7) szummájánál beszorozhatunk, és a kapott két sor összegsora is abszolút konvergens, összege pedig a két sorösszeg összege. Ebben az intervallumban érvényes tehát az

$$\frac{1-x}{1-6x+x^2} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{A}{x_1^{i+1}}-\frac{B}{x_2^{i+1}}\right)x^i,$$

illetve — az általános tag együtthatóját egyszerűbb alakra hozva — az

$$\frac{1-x}{1-6x+x^2} = \sum_{i=0}^{\infty}(-Ax_2^{i+1}-Bx_1^{i+1})x^i \tag{8}$$

hatványsorba fejtés. Ismert tétel, hogy ha a 0 pont környezetében az f függvény hatványsorba fejthető, akkor ez a sor az egyetlen ilyen sor. Ezért (8) jobb oldalát a (2)-vel vetjük össze. Ilyen módon (1*) explicit alakjára az

$$a_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}(3+\sqrt{8})^n+\frac{2-\sqrt{2}}{4}(3-\sqrt{8})^n,$$

ebből az (1)-re pedig az

$$a_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}(3+\sqrt{8})^{n-1}+\frac{2-\sqrt{2}}{4}(3-\sqrt{8})^{n-1},$$

illetve az

$$a_n = \frac{2-\sqrt{2}}{4}(3+\sqrt{8})^n+\frac{2+\sqrt{2}}{4}(3-\sqrt{8})^n \tag{9}$$

előállítást kapjuk. A (9)-et a $3\pm\sqrt{8}=(\sqrt{2}\pm1)^2$ észrevétel alapján így is írhatjuk:

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)^{2n}+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{2n}\right), \tag{10}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left((\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}\right). \tag{11}$$

Minthogy néhány helyen az okoskodásunk felszínes volt, ezért meg kell néznünk, hogy a (11) eleget tesz-e az (1)-nek. A behelyettesítés azt adja, hogy igen.

Hogy a kitűzött feladat állítását igazoljuk, nézzük meg a $2a_n^2-1$ értéket:

$$2a_n^2-1=\frac{1}{4}\left(\left((\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}\right)^2-4\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left((\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}+2\right)\left((\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}-2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left((\sqrt{2}+1)^{\frac{2n-1}{2}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{2n-1}{2}}\right)^2\left((\sqrt{2}+1)^{\frac{2n-1}{2}}-(\sqrt{2}-1)^{\frac{2n-1}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left((\sqrt{2}+1)^{2n-1}-(\sqrt{2}-1)^{2n-1}\right)^2.$$

Az utolsó nagy zárójelben levő különbség kisebbítendője nagyobb 1-nél, a kivonandója kisebb 1-nél, ezért a különbség pozitív. Azt kaptuk, hogy

$$\sqrt{2a_n^2-1}=\frac{1}{2}\left((\sqrt{2}+1)^{2n-1}-(\sqrt{2}-1)^{2n-1}\right) \tag{12}$$

érvényes. A jobb oldali számról kimutatjuk, hogy egész szám.

Alkalmazva rá a binomiális tételt, ezt kapjuk:

$$\binom{2n-1}{1}2^{n-1}+\binom{2n-1}{3}2^{n-2}+\binom{2n-1}{5}2^{n-3}+\ldots+\binom{2n-1}{2n-5}2^2+\binom{2n-1}{2n-3}2+1,$$

és ez egész szám.

Megjegyzés: A feladat megoldása sokkal általánosabban megtalálható a következő dolgozatban: Péter Kiss—Ferenc Várnai: On Generalized Pell Numbers, Mathematics Seminar Notes — Kobe Univ., Japán, 6 (1978) 259—267.

Várnai Ferenc, Miskolc

A megoldók száma: 19.

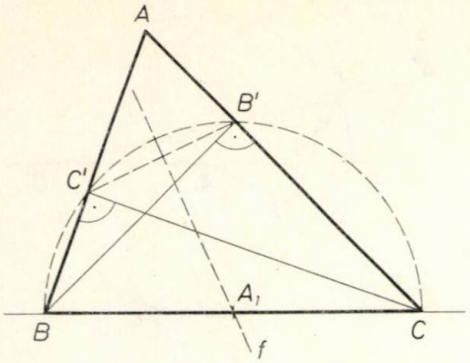
906. Adott a háromszög egyik oldalegyenese és a másik két oldalhoz tartozó magasság talppontja. Szerkesszük meg a háromszöget!

Megoldás: Vegyük ismertnek a keresett $ABC\triangle$ BC oldalegyenesét, továbbá a B-ből húzott magasság B', és a C-ből húzott magasság C' talppontját!

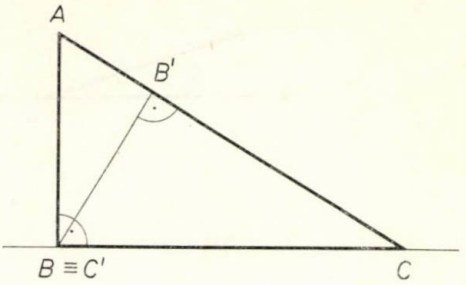
I. Tegyük fel először, hogy az adatokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető (1. ábra)! Akkor B' is, C' is az a oldalegyenes azon félsíkjának belső pontja, amely tartalmazza az ABC háromszöget (a továbbiakban röviden felső és alsó félsíkot fogunk mondani); mindkettő egy-egy oldal belső pontja, tehát különbözők; mindkettőből 90°-ban látszik a BC szakasz. Ezek folytán illeszkednek BC Thalész-körének felső nyitott félkörívére, emiatt a $B'C'$ szakasz f felezőmerőlegese a BC oldal A_1 felezőpontjában metszi a-t, és a kör sugara $A_1B'=A_1C'$. Minthogy $B'C'$ a felső félkör húrja, ezért nem merőleges a-ra; a betűzésből pedig az következik, hogy a felső zárt félkörön a BB' és CC' pontpárok elválasztják egymást. Ezek mind szükséges feltételek.

A szerkesztéshez induljunk ki az adott a egyenesből és egyik félsíkjának két adott belső pontjából, B'-ből és C'-ből, de $B'C'$ ne legyen merőleges a-ra. Ekkor f metszi a-t. Az A_1 metszéspontjuk köré írjunk $A_1B'(=A_1C')$ sugárral kört. Ez a kör metszi a-t. Jelöljük a metszéspontokat B^* és C^*-gal, mégpedig úgy, hogy a B^*B' és C^*C' pontpárok a félkörön válasszák el egymást (ezt csak egyféleképpen tehetjük meg). Mivel a $C^*B^*C'\sphericalangle$ és a $B^*C^*B'\sphericalangle$ hegyesszög, ezért a B^*C' és a C^*B' félegyenesek metszik egymást, az A^* metszéspont a pontok sorrendje miatt a felső félkörlapon kívül van. Könnyű látni, hogy a megszerkesztett $A^*B^*C^*\triangle$ megoldás; a háromszög hegyesszögű (A^* a BC Thalész-körén kívül van); B^* és C^* egyértelműen meghatározott, ezért ez az egyetlen hegyesszögű háromszög szerkeszthető. Az adott B' és C' pontok más elhelyezkedése esetén nincs megfelelő hegyesszögű háromszög, mert egy szükséges feltétel nem teljesül (a feladat szövege nem két adott talppontról beszél, tehát még arra is gondolnunk kell, hogy azonosakként vannak adva).

II. Tegyük fel most, hogy az adatokból derékszögű háromszög szerkeszthető. Akkor két lényegesen eltérő eset következhet be: *a)* BC befogó, *b)* BC átfogó.



1. ábra



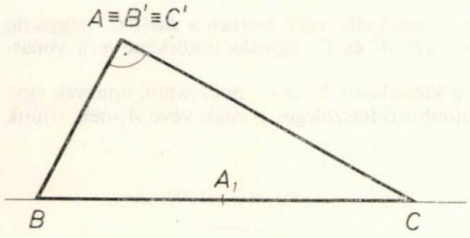
2. ábra

Az *a)* esetben (2. ábra) $B \equiv C'$ és ez a pont a-n van; B' nem illeszkedik a-ra; $B'C'$ nem merőleges a-ra. A szerkesztésre térve, ha a C' az a-n van, B' nincs az a-n és $B'C'$ nem merőleges a-ra, akkor a B'-ben BB'-re merőlegest állítva könnyű belátni, hogy egyetlen derékszögű háromszög szerkeszthető úgy, hogy BC befogó legyen. (A „C' nincs az a-n, B' az a-n van" eset nyilvánvalóan ugyanez.)

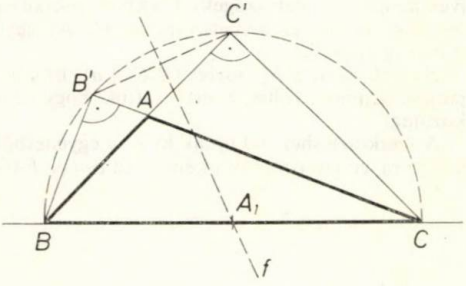
A *b)* esetben (3. ábra) $B' \equiv C'$, és egybeesnek az A derékszögű csúccsal is. Most f nem létezik, de a BC A_1 felezőpontja szerkeszthető. Megfordítva a szerkesztéshez adatnak vegyük az a egyenest és a rá nem illeszkedő $B' \equiv C'$ pontot. Vegyük fel az a tetszőleges A_1 pontját. A_1 köré írjunk A_1B' sugárral kört. Mindig megoldást kapunk: most végtelen sok derékszögű háromszög szerkeszthető.

Ha a B' és C' pont úgy van megadva, hogy az előbb megállapított szükséges feltételek valamelyike nem teljesül, akkor nem szerkeszthető megfelelő derékszögű háromszög.

III. Tegyük fel végül, hogy az adatokból tompaszögű háromszög szerkeszthető. Ekkor is két lényegesen eltérő lehetőséget kell figyelembe vennünk: *a)* BC a legnagyobb oldal, *b)* BC nem a legnagyobb oldal.



3. ábra



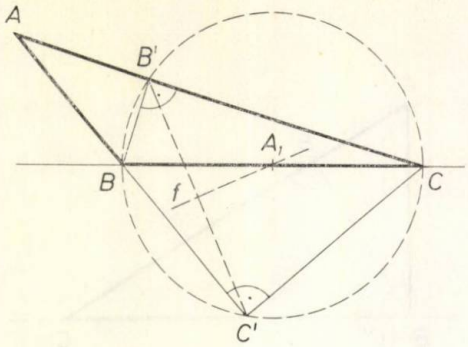
4. ábra

Az *a)* esetben (4. ábra) B' is, C' is a felső félsík belső pontja; különböző pontok; illeszkednek BC Thalész-körének felső nyitott félkörívére; f az A_1 felezőpontban metszi BC-t; a Thalész-kör sugara $A_1B' = A_1C'$; $B'C'$ nem merőleges az a-ra; a zárt felső félköríven a BB' és CC' pontpárok nem választják el egymást.

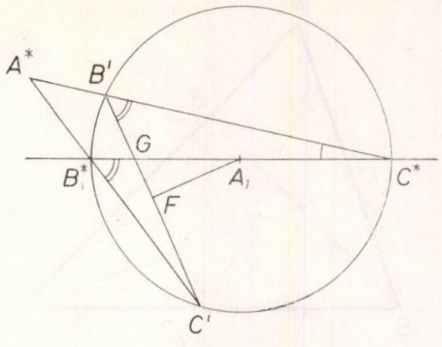
Az I. esethez hasonlóan beláthatjuk, hogy ha $B' \neq C'$, és az egyik félsík belső pontjai, továbbá $B'C'$ nem merőleges az a-ra, akkor egyetlen ilyen tompaszögű háromszög szerkeszthető.

A *b)* esetben legyen AC a legnagyobb oldal (5. ábra). Ekkor B' az a felső, C' pedig az alsó félsíkjának belsejében van, mégpedig BC Thalész-körén. Emiatt f-nek mint egy húr felezőmerőlegesének van közös pontja a BC szakasszal. Mégpedig ha $B'C'$ nem merőleges az a-ra (b_1) eset), akkor metszi a-t, ha viszont $B'C'$ merőleges az a-ra (b_2) eset), akkor $f \equiv a$.

A b_1) esetben f és a metszéspontja BC Thalész-körének középpontja. Ha ez éppen $B'C'$ F felezőpontja volna, akkor a $BB'CC'$ négyszög átlói feleznék egymást, azaz paralelogramma volna. Ez azonban lehetetlen, mert a $BB'CC'$ négyszögnek — $B'C'$ és a kölcsönös helyzetétől függetlenül — soha sincsenek párhuzamos oldalai. Ugyanis BC' és $B'C$ az α hegyesszög szárain levő szakaszok, továbbá



5. ábra



6. ábra

az α-t tartalmazó $ABB'\triangle$ és $ACC'\triangle$ derékszögű, de derékszögük B'-nél, illetve C'-nél van. Tehát ha $B'C'$ nem merőleges az a-ra, akkor F az egyik félsík belső pontja.

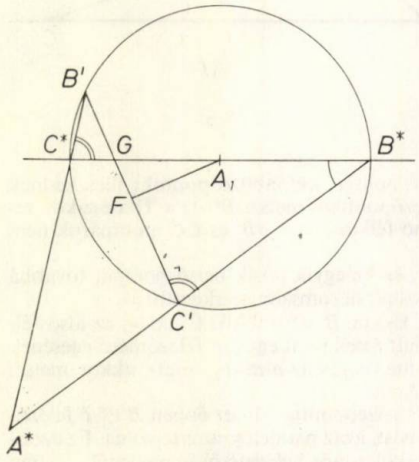
A szerkesztéshez adottnak véve a-t és más-más félsík belsejében B'-t és C'-t úgy, hogy $B'C'$ nem merőleges a-ra és F nincs az a-n, messe f az a-t A_1-ben. Az A_1 köré $A_1B' = A_1C'$ sugárral írjunk kört, ez metszi a-t.

A metszéspontokat a 6. ábra szerint jelölve a $C^*B'G\sphericalangle > C^*\sphericalangle$ (mert a $C^*B'A_1\triangle$ egyenlő szárú); a kétíves szögek egyenlők (a kisebbik $C'C^*$ íven nyugvó kerületi szögek); az egyíves és a kétíves szög hegyesszög (hiszen a $C^*GB'\sphericalangle$ tompaszög). Ezek folytán a $C'B^*$ és C^*B' egyenesek a felső félsík belsejében metszik egymást. Legyen a metszéspont A^*. Mivel a kétíves szög hegyesszög, ezért az $A^*B^*C^*\triangle$ tompaszögű, és nyilvánvalóan megoldás. A kapott háromszög egyértelműen meg van határozva.

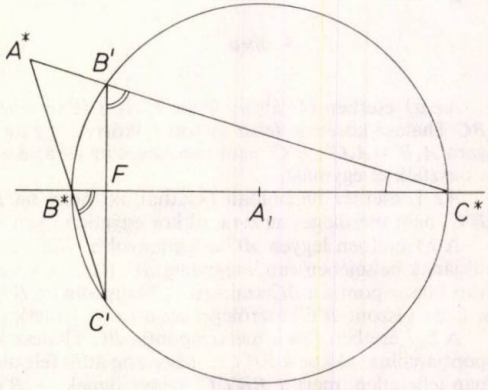
A kör és a metszéspontjait a 7. ábra szerint betűzve kérdés, hogy a B^*C' és $B'C^*$ egyenesek metszik-e egymást, és ha igen, hol. A 6. ábránál végzett vizsgálathoz hasonlóan beláthatjuk, hogy a $B^*GC'\triangle$ -ben a kétíves szög nagyobb az egyívesnél, mindketten hegyesszögek (félkörnél kisebb íven nyugvó kerületi szögek). Ezekből következően $B'C^*$ és B^*C' az alsó félsík belsejében metszik egymást, legyen ez a metszéspont A^*. Az egyértelműen meghatározott $A^*B^*C^*$ tompaszögű háromszög megoldás.

Nézzük most a b_2) esetet ($B'C' \perp a$). Ekkor $F \neq A_1$, mert ellenkező esetben a $BB'CC'$ négyszög paralelogramma volna, és erről láttuk, hogy nem lehet az; B' és C' egymás tükörképe a-ra vonatkozólag.

A szerkesztéshez induljunk ki az a egyenesből és a különböző B' és C' pontokból, amelyek egymás a-ra vonatkozó tükörképei. Az a-nak F-től különböző tetszőleges pontját véve A_1-nek, írjunk



7. ábra



8. ábra

köré $A_1B' = A_1C'$ sugarú kört. E körnek és a-nak a metszéspontjait a 6—7. ábrának megfelelően kétféleképpen betűzhetjük. Az egyiket a 8. ábra mutatja. A $C^*B'F\triangle$-ből (minthogy az $A_1C^*B'\triangle$ egyenlő szárú) könnyű látni, hogy a kétíves szög nagyobb az egyívesnél. Emiatt a $C'B^*$ és C^*B' a felső félsík belsejében metszik egymást (legyen ez a pont A^*). A másik betűzéssel ennek a tompaszögű $A^*B^*C^*\triangle$-nek a-ra vonatkozó tükörképét kapjuk. Ez esetben tehát végtelen sok megfelelő tompaszögű háromszög szerkeszthető.

Ha a megállapított szükséges feltételek nem teljesülnek, akkor nem szerkeszthető megfelelő tompaszögű háromszög.

Összefoglalva: adott az a egyenes, továbbá egy vagy két pont.

Ha az adott egyetlen pont illeszkedik a-ra, akkor nincs megoldás, ha nem illeszkedik, akkor végtelen sok megfelelő derékszögű háromszög szerkeszthető (és más háromszög nem).

Két adott pont esetén:

1. ha mindkettő a-n van, akkor nincs megoldás;
2. ha az egyik (például B') pontja a-nak, de a másik nem, akkor
   2_1. a $B'C' \perp a$ esetben nincs megoldás,
   2_2. a $B'C' \not\perp a$ esetben egyetlen megfelelő háromszög szerkeszthető;
3. ha egyik sincs a-n, akkor
   3_1. $B'C' \perp a$ teljesülése esetén az $f \| a$ esetben nincs megoldás; az $f \equiv a$ esetben végtelen sok megfelelő tompaszögű háromszög szerkeszthető (A_1 nem lehet F);
   3_2. a $B'C' \not\perp a$ teljesülésekor, ha F az a-n van, akkor nincs megoldás, ha F nincs az a-n, akkor két megoldás szerkeszthető. (Ha ugyanazon félsíkban vannak, akkor egy hegyesszögű és egy tompaszögű háromszög, ha ellenkező félsíkokban vannak, akkor két tompaszögű háromszög.)

A (teljeshez elég közeli) megoldások száma: 10.

907. A háromszög a, b $(a>b)$ oldalai, az általuk bezárt γ szög f_c szögfelezője és a γ mellékszögének f_c' szögfelezője közt fennáll az

$$\frac{f_c'}{f_c} = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{3}$$

összefüggés. Mekkora a γ szög?

Csányi Péter, Nagykőrös

A feladat megoldása megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok 1979. májusi számának 204—205. oldalán (58. kötet 5. szám, F. 2184. sz. feladat).

A megoldók száma: 34.

908. Az r sugarú k_1 félkör AB átmérőjére az AB k_1-et tartalmazó félsíkjában két $r/2$ sugarú félkört (k_2, k_3) helyezünk el az átmérőjükkel úgy, hogy érintsék egymást a k_1 középpontjában. A k_4 kör belülről érinti k_1-et és kívülről a k_2-t, k_3-at. Mekkora annak a körnek a sugara, amely k_1-et belülről, k_3-at és k_4-et pedig kívülről érinti?

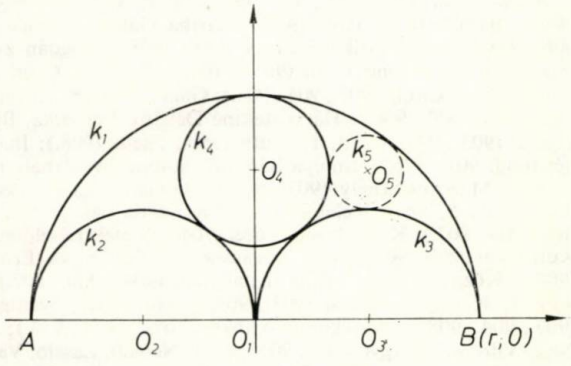
Megoldás: A k_4 kör sugarát könnyen meghatározhatjuk Pitagorasz tételével: $r/3$ adódik. A feladat kérdésére választ adhatunk például úgy, hogy az alakzathoz derékszögű koordináta-rendszert veszünk fel. Az ábra szerinti elhelyezés mellett olyan ϱ $(\varrho < r/2)$ sugarú k_5 kört keresünk, amelynek O_5 középpontja rajta van az O_3 középpontú $\frac{r}{2}+\varrho$, az O_4 középpontú $\frac{r}{3}+\varrho$ és az O_1 középpontú $r-\varrho$ sugarú körön. Az említett körök egyenlete rendre:

(1) $$\left(x-\frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}+\varrho\right)^2$$

(2) $$x^2 + \left(y-\frac{2r}{3}\right)^2 = \left(\frac{r}{3}+\varrho\right)^2$$

(3) $$x^2 + y^2 = (r-\varrho)^2.$$

Tegyük fel, hogy az O_5 pont x_0 és y_0 koordinátái a ϱ körsugárral együtt kielégítik mind a három egyenletet. Akkor kielégítik azt az egyenletet is, amely (1)-ből, illetve (2)-ből úgy származik, hogy (3) alapján $x_0^2 + y_0^2$ helyett $(r-\varrho)^2$-et írunk a bal oldalukon. Egyszerűbb



9. ábra

alakra térve át teljesülnek az

$$x_0 = r - 3\varrho \tag{4}$$

$$y_0 = r - 2\varrho$$

egyenletek. Ezek jobb oldalát írjuk be (3) bal oldalába. Egyszerűsítések után arra jutunk, hogy fennáll a

$$12\varrho^2 - 8r\varrho + r^2 = 0$$

egyenlet. A megoldóképletből az adódik, hogy igaz a $\varrho = \frac{r}{2} \vee \varrho = \frac{r}{6}$ diszjunkció. Az első érték nem felel meg, a keresett körsugár csak $\frac{r}{6}$ lehet, a (4) alatti egyenletek pedig (x_0, y_0)-ra az $\left(\frac{r}{2}, \frac{2r}{3}\right)$ számpárt adják. A behelyettesítés azt mutatja, hogy megoldását kaptuk az (1)–(2)–(3) egyenletrendszernek. Tehát a feladat megoldása az $O_5\left(\frac{r}{2}, \frac{2r}{3}\right)$ középpontú $\frac{r}{6}$ sugarú kör.

Feltűnő, hogy az $O_1O_3O_5O_4$ négyszög téglalap. Érdekes a jelentése a másodfokú egyenlet $\frac{r}{2}$ gyökének: az O_2 köré $\frac{r}{2}$ sugárral írt kör belülről érinti az O_1 középpontú r sugarú kört, és kívülről az O_3 középpontú $\frac{r}{2}$ sugarú kört, továbbá a k_4 kört.

Németh László, Vasvár és
Szánthó Gyula, Gyula

I. megjegyzés: Sok megoldó a következő megoldást — vagy megoldást is — adta: Az O_4 meghatározása után az $O_1O_3O_4$ derékszögű háromszöget egészítsük ki téglalappá úgy, hogy az O_1-et tükrözzük O_3O_4 felezőpontjára. A negyedik csúcsról könnyű belátni, hogy rajta van az (1), (2), (3) egyenletekkel jellemzett körökön, tehát éppen a keresett kör középpontja.

II. megjegyzés: Sugár György „a jobb oldalon lefelé" folytatta a k_1-et és a k_3-at érintő körök beírását úgy, hogy mindegyik érintse az előző kis kört is. Eredménye: ha — teljes köröket véve — k_2 sugara ϱ_0, k_4-é ϱ_1, k_5-é ϱ_2 stb., akkor

$$\varrho_n = \frac{r}{n^2+2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ez speciális esete egy általánosabb feladatnak, amelynek megoldása megtalálható a Matematikai Lapok VIII. évfolyamának 3—4. számában (Bolyai János Matematikai Társulat, Bp. 1957.) a 338—340. oldalon.

A megoldók száma: 32.

A megoldók névsora (903—908.)

Almási Béla, Ózd (903., 905., 907., 908.); Appel György, Bp. (903.); Dr. Bakács Istvánné, Bp. (908.); Balogh Imre, Pápa (908.); Bartha Gábor, Szentendre (903. két mód, 904., 905. két mód, 906—908.); Bencze Mihály, Brassó (903., 905.); Bogdán Zoltán, Cegléd (903—905., 907., 908. két mód); Csorba Ferenc, Győr (903—905., 907., 908.); Csúri József, Szeged (903., 905—908.); Fecser Ferenc, Nagykároly (903., 904., 908.); Gaál László, Sepsiszentgyörgy (903., 905.); Gőgh József, Gúta (903., 904., 907., 908.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Bp. (903., 907., 908.); Hortobágyi János, Gyulaj (903., 907., 908.); Horváth Géza, Zselíz (908.); Ihász László, Nagybajom (903., 904., 905. két mód, 907., 908.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (903. két mód, 904., 906—908.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (903—908.); Kamarás Lajos, Pécs (903., 904., 905. három mód, 906., 907. két mód, 908.); Kelemen Lajos, Kisvárda (903., 906—908.); Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (904., 907.); Kiss Margit, Pécel (904.); Kotek Lászlóné, Pécs (904., 907., 908.); Kovács Gábor, Komárom (903—905., 907.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Érd (904., 907.); Kovács Zoltán, Szádalmás (903.); Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (904., 906., 907.); K. Tóth György, Békéscsaba (903.); Kulcsár Károlyné, Szücsi (903., 907.); Kun Péter, Szentendre (903., 904.); Dr. Major Pál, Bp. (903., 904., 908.); Matekovits Mihály, Arad (903., 904.); Nagy Béla, Sarkad (903., 904., 908.); Nagy Vilmos, Gyergyó (903., 904., 907.); Németh László, Vasvár (904., 907. két mód, 908.); Németh László, Zalaegerszeg (903., 904., 907. két mód, 908.); Nyirő László, Mezőkövesd (903., 904., 908.);

Oláh György, Komárom (Csehszlovákia) (904.); Polcz Katalin, Pécs (903—905., 907., 908.); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (907.); Schutzbach Mártonné, Siófok (904., 907.); Simon Béla, Nyíregyháza (903.); Sugár György, Bp. (903—906., 908. két mód); Szánthó Gyula, Gyula (903—905., 907., 908.); Dr. Szikszai József, Miskolc (903., 905. két mód, 906—908.); Szilágyi István, Esztergom (903—908.); Szlízs Róbert, Galánta (903., 904.); Tóth Ferenc, Szeged (903., 907.); Várnai Ferenc Miskolc (905.); Vermes Miklós, Bp. (907., 908.); Vigassy Lajos, Bp. (907., 908.); Zalán Péterné, Bp. (903—905., 907. két mód, 908.); Zsidó Dónát, Brassó (903., 904., 907., 908.); Zsidó György, Kolozsvár (903—905., 907.).

KÖNYVISMERTETÉS

Buvári Anikó: Repülőgéppel a galacsinták tartományába

(Budapest, 1978. Tankönyvkiadó)

Amikor először belelapoztam ebbe a könyvbe, egy néhány évvel ezelőtti szülői értekezlet jutott eszembe. Aggódó apuka mondta el: Örül annak, hogy az új matematika fejleszti a gyerekek racionális gondolkodását, de vajon nem fog-e fantáziaviláguk elszürkülni, elsatnyulni. Szeretném remélni, hogy ez az apuka megnyugodott már. Buvári Anikó könyve is példa arra, hogyan lehet a gyerekek ismereteit úgy bővíteni, gondolkodásukat úgy fejleszteni, hogy eközben még fantáziájuk is fejlődjék.

A „Repülő Kuckó" vendégei (és a róla írt könyv olvasói) apránként megismerkednek Matematikaország egyik tartományával: Galacsintával. A galacsin és a palacsinta szavakból „összegyúrt" GALACSINTA szó találóan, — a szabályokra emlékeztetően nevezi el „házi használatra" a topológiát. A tartomány lakói, a galacsinták „állandóan mindent hajlítgatnak, nyújtanak, összenyomnak — egyszóval: galacsintáznak. Ebben a galacsintázásban az a legérdekesebb, hogy valóban hasonlít a gyurmázáshoz vagy a guminyújtogatáshoz, de galacsintázás közben az anyag sohasem szakad el és nem is ragad össze." A könyv végig galacsinta terminológiát használ. Az utószóban — a „felnőttek kedvéért" — szótárt is kapnak a gyerekek: palacsinta = elemi felület; palacsintából galacsintázható = elemi felülettel ekvivalens stb. Az utazás résztvevői 48 feladatot oldanak meg. A megoldásokat közvetlenül a feladatok után hagyott üres részekbe írhatják. Ha valamelyik feladatot nem sikerülne megoldaniuk, a megoldásoknál általában megtalálják a helyes választ. A feladatok révén az egyszerű zárt és nyitott vonalak, felületek topológiailag invariáns tulajdonságaival ismerkednek a gyerekek. A vonalak közül részletesen foglalkoznak az I és az 0 típusúakkal. A felületekről szóló feladatok kiemelik a határvonalak, oldalak számának szerepét. Eljutnak az alapszám fogalmához (ez a kerettörténet szerinti raktári számmal azonos). Kimondják az Euler-tételt (a gömbbel topológiailag ekvivalens felületekre). Azonos szerkezetű tételeket mondanak ki egy-, két-, három-, négylyukú felületekre. Egy vonallal próbálnak görbéket megrajzolni, minél kevesebb színnel térképet színezni.

A könyvet feldolgozásmódja alkalmassá teszi arra, hogy 8—10 éves gyerekek önállóan vagy csoportosan elolvassák és feladatait megoldják. Így nagymértékben hozzájárulhat ahhoz, hogy a gyerekek megtanuljanak matematikai témájú szövegeket olvasni. Alkalmas lehet tanórai, szakköri és napköziben történő feldolgozásra. Bár a könyv a kisiskolások fantáziáját mozgatja meg leginkább, nagyobbak, sőt felnőttek is tanulhatják feladatain keresztül a topológiát.

A szerző könyvét elsősorban 8—10 éveseknek szánta, ezért sokkal veszélyesebbek a sajtóhibák, ábrahibák, valamint az ábraszámozás híján időnként félreérthető utalások. Több helyen szerepel utalás olyan színre (a pirosra), ami nincs a könyvben, s utasítás sem volt arra, hogy valamit is fessenek pirosra. Félő, hogy modellezőkészlet hiányában több érdekes feladatot kihagynak a gyerekek. Talán egy további mellékleten a szükséges lapokból 10—15 darabot érdemes lenne megrajzolni. Reméljük, hogy a könyv következő kiadása előtt lehetősége nyílik a szerzőnek a szükséges módosítások elvégzésére.

A könyv levegős, nagybetűs szedése elősegíti, hogy a 8—10 éves gyerekek valóban jól tudják azt olvasni. Reméljük, hogy a Tankönyvkiadó egyre több ilyen kiadványt fog megjelentetni. Sajnos, a második szín (kék) csak helyenként (fedőlap, néhány ábra és melléklet) elég vidám. A könyv eredeti célját jobban szolgálta volna, ha merészebben élnek a második szín adta lehetőséggel. Aki ezt a könyvet úgy olvassa végig, hogy dolgozik a feladatokon, megoldja azokat, sokszor fogja kezébe venni — amit a ragasztott technika nem biztos, hogy kibír.

Radnainé Szendrei Julianna

4,50 Ft

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Fűzve

Dr. Kőhegyiné—Vajda: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681) ..... 16,—

Horvay—Pálmay: *Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához* (92 143) 16,50

Czapáry—Virág: *Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában* (92 363) ..... 20,—

Hámori: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205) ..... 10,—

Kovács Gy.: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika III. (29 217) 15,50

Középiskolai matematikai versenyek VI.—VII. kötet (29 188/VI.—VII.) 16,50

Lukács—Scharnitzky: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok VI.* (29 190/VI) ..... 16,—

Cser—Pálfy: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához* (91 478) 19,50

Cser—Pálfy: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanításához* (91 480) ..... 24,—

Élő matematika 1. Tanulmányok. Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1) ..... 18,—

Jánossy—Tasnádi: *Élő matematika 2. Valószínűségszámítás* (92 347/2) ..... 6,—

Gergely—Hódi és mások: *Élő matematika 3. A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3) ..... 13,—

Korányi: *Élő matematika 4. Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4) 18,50

Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184) 11,50

Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1) ..... 10,—

Beszerezhetők

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565